

**RESOLUÇÃO DA PROVA DE MATEMÁTICA DA
UFBA
VESTIBULAR– 2009 – 1ª Fase
Professora Maria Antônia Gouveia.**

QUESTÕES de 01 a 08

INSTRUÇÃO: Assinale as proposições verdadeiras, some os números a elas associados e marque o resultado na Folha de Respostas.

Questão 01

Sobre números reais, é correto afirmar:

- (01) O produto de dois números racionais quaisquer é um número racional.
- (02) O produto de qualquer número inteiro não nulo por um número irracional qualquer é um número irracional.
- (04) O quadrado de qualquer número irracional é um número irracional.
- (08) Se o quadrado de um número natural é par, então esse número também é par.
- (16) Todo múltiplo de 17 é um número ímpar ou múltiplo de 34.
- (32) A soma de dois números primos quaisquer é um número primo.
- (64) Se o máximo divisor comum de dois números inteiros positivos é igual a 1, então esses números são primos.

RESOLUÇÃO:

(01) Verdadeiro.

(02) Verdadeiro.

(04) Falso. O conjunto dos números irracionais não é fechado em relação a nenhuma operação.

(08) Verdadeiro.

(16) Verdadeiro.

(32) Falso.

Exemplos: $3 + 7 = 10$, $2 + 7 = 9$, $5 + 11 = 16$,...

(64) Falso, pois, se o máximo divisor comum de dois números inteiros positivos é igual a 1, então esses números são primos entre si e não necessariamente números primos.

Questão 02

Sobre a função $f: [0, 1] \rightarrow \mathbf{R}$, representada pelo gráfico ao lado, é correto afirmar:

(01) A imagem da função f é o intervalo $[0, 1]$.

(02) Existe um único $x \in [0, 1]$ tal que $f(x) = \frac{1}{2}$.

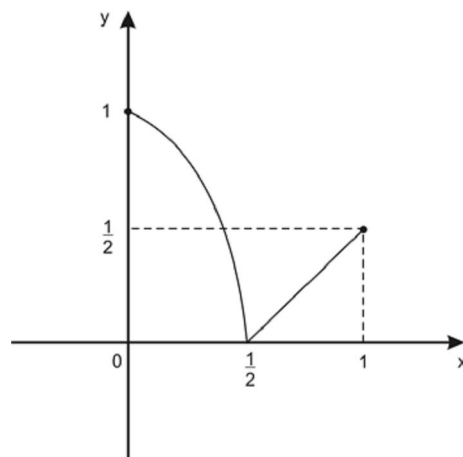
(04) A função f é decrescente em $\left[0, \frac{1}{2}\right]$ e crescente em

$\left[\frac{1}{2}, 1\right]$

(08) A imagem da função $g: [-1, 0] \rightarrow \mathbf{R}$ definida por $g(x) = f(-x)$ é o intervalo $[0, 1]$.

(16) $f(f(f(0))) = 0$ e $f(f(f(1))) = 1$.

(32) $f \circ f \circ f$ é a função identidade.



RESOLUÇÃO:

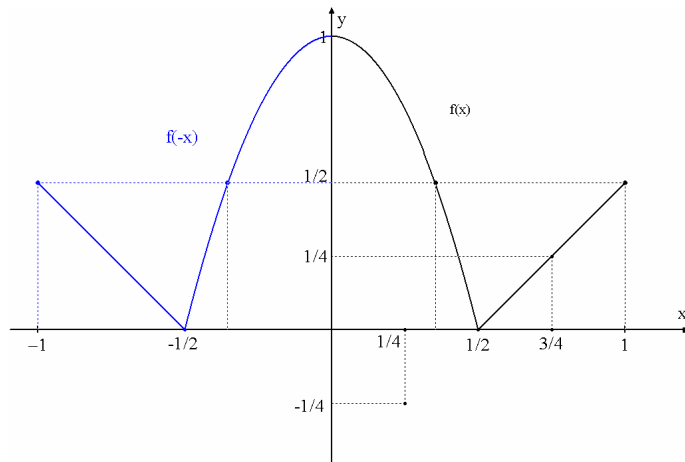
(01) Verdadeiro.

(02) Falso.

(04) Verdadeiro.

(08) Verdadeiro.

O gráfico de $g(x) = f(-x)$ é simétrico ao gráfico de $f(x)$ em relação ao eixo Oy .



(16) Verdadeiro.

$f(f(f(0))) = f(f(1)) = f(1/2) = 0$ e $f(f(f(1))) = f(f(1/2)) = f(0) = 1$ (VER FIGURA ACIMA)

(32) Falso.

Fazendo $x = \frac{1}{4}$, por exemplo, $f(f(f(1/4))) = f(f(-1/4))$ e $-1/4 \notin [0, 1]$, intervalo que é o domínio da função. (VER FIGURA ACIMA)

Questão 03

Um grupo de 90 pessoas, interessadas em viajar de férias, contata uma companhia aérea que faz a seguinte proposta: se o número de pessoas que confirmarem a viagem for igual a n , cada uma delas pagará o valor $p(n)=1600-10n$ pela passagem.

Seja $A = \{1, 2, \dots, 90\}$, define-se a função $p: A \rightarrow \mathbf{R}$.

Se o valor total a ser recebido pela Companhia é dado pela função $r: A \rightarrow \mathbf{R}$, definida por $r(n) = 1600n - 10n^2$, então pode-se afirmar:

- (01) A função p é decrescente.
- (02) O valor de cada passagem é um número inteiro pertencente ao intervalo $[700, 1590]$.
- (04) Tem-se $p(n) = 1352$ para algum $n \in A$.
- (08) A função r é crescente.
- (16) Cada confirmação de viagem provoca um acréscimo constante no valor de r .
- (32) Existe um único $n \in A$ tal que $r(n) = 63000$.
- (64) O valor total recebido pela Companhia será máximo, se $n = 80$.

RESOLUÇÃO:

Cada uma das n pessoas pagará o valor $p(n)=1600-10n$ pela passagem.

O valor da receita é $r(n) = n(1600-10n) = 1600n - 10n^2$.

(01) Verdadeiro.

A função $p(n) = 1600 - 10n$ é decrescente, pois o coeficiente angular é igual a -10 .

(02) Verdadeiro.

O menor valor da passagem é $p(90) = 1600 - 900 = 700$ e o maior valor é $p(1) = 1600 - 10 = 1590$.

(04) Falso.

$1600 - 10n = 1352 \Rightarrow 10n = 1600 - 1352 = 248 \Rightarrow n = 248 : 10 = 24,8 \notin A$.

(08) Falso.

A função $r(n) = 1600n - 10n^2$ é decrescente, pois o coeficiente do termo de maior grau é negativo.

(16) Falso.

Porque a função $r(n) = 1600n - 10n^2$ é decrescente.

(32) Falso..

$1600n - 10n^2 = 63000 \Rightarrow n^2 - 160n + 6300 = 0 \Rightarrow \Delta = 25600 - 25200 = 400 \Rightarrow$

$$n = \frac{160 \pm 20}{2} \Rightarrow n = 70 \quad \text{ou} \quad n = 90$$

(64) Verdadeiro.

O valor total recebido pela Companhia será no máximo igual a 64000 para $n = \frac{-1600}{-20} = 80$.

Questão 04

Considerando-se que a concentração de determinada substância no corpo humano é dada, em

miligramas, por $C(t) = 15.2^{-\frac{t}{4}}$, sendo $t \geq 0$ o tempo, em horas, contado desde a ingestão da substância, é correto afirmar:

(01) A concentração inicial da substância é igual a 30mg.

(02) Duas horas após a ingestão, a concentração da substância é igual a $\frac{15}{\sqrt{2}}$ mg.

(04) A imagem da função C é o intervalo $[0, 15]$.

(08) A função C é decrescente.

(16) Dado $k \in]0, 15]$, o único valor de t que satisfaz a equação $C(t)=k$ é $t = 4\log_2\left(\frac{15}{k}\right)$.

(32) A cada período de quatro horas, o valor de $C(t)$ se reduz à metade.

(64) Se t_1, t_2, \dots, t_n é uma progressão aritmética, então $C(t_1), C(t_2), \dots, C(t_n)$ é também uma progressão aritmética.

RESOLUÇÃO:

(01) Falso.

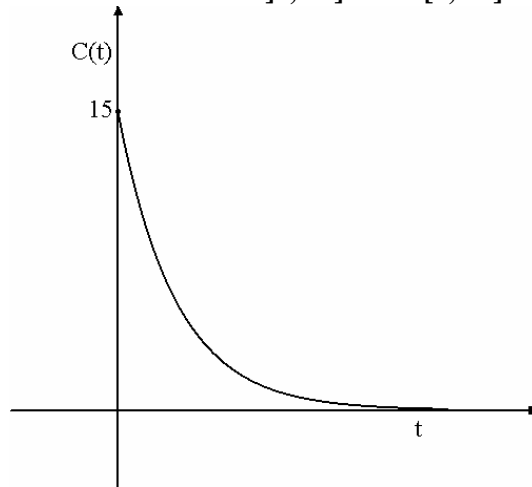
$$C(0) = 15 \cdot 2^0 = 15 \text{ mg.}$$

(02) Verdadeiro

$$C(t) = 15 \cdot 2^{-\frac{t}{4}} = \frac{15}{\sqrt{2}} \text{ mg.}$$

(04) Falso.

A imagem da função $C(t) = 15 \cdot 2^{-\frac{t}{4}}$ é o intervalo $]0, 15]$ e não $[0, 15]$.



(08) Verdadeiro.

(16) Verdadeiro.

$$t = 4\log_2\left(\frac{15}{k}\right) \Rightarrow C\left(4\log_2\left(\frac{15}{k}\right)\right) = 15 \cdot 2^{-\frac{4\log_2\left(\frac{15}{k}\right)}{4}} = 15 \cdot 2^{-\log_2\left(\frac{15}{k}\right)} = 15 \cdot 2^{\log_2\left(\frac{k}{15}\right)} = 15 \cdot \frac{k}{15} = k.$$

(32) Verdadeiro.

$$C(t) = 15 \cdot 2^{-\frac{t}{4}} \Rightarrow C(t+4) = 15 \cdot 2^{-\frac{t+4}{4}} = 15 \cdot 2^{-\frac{t}{4}} \cdot 2^{-1} = \frac{1}{2} \left(15 \cdot 2^{-\frac{t}{4}} \right).$$

(64) Falso.

Se t_1, t_2, \dots, t_n é uma progressão aritmética, então $t_1 = a, t_2 = a + r, \dots, t_n = a + (n - 1)r$ é uma

progressão aritmética, então $C(a) = 15.2^{-\frac{a}{4}}, C(a+r) = 15.2^{-\frac{a}{4} - \frac{r}{4}} = 2^{-\frac{r}{4}} \left(15.2^{-\frac{a}{4}} \right)$,

$$C(a+2r) = 15.2^{-\frac{a}{4} - \frac{2r}{4}} = \left(2^{-\frac{r}{4}} \right)^2 \left(15.2^{-\frac{a}{4}} \right), \dots, C[a+(n-1)r] = 15.2^{-\frac{a}{4} - \frac{(n-1)r}{4}} = \left(2^{-\frac{r}{4}} \right)^{(n-1)} \left(15.2^{-\frac{a}{4}} \right) \Rightarrow$$

$C(t_1), C(t_2), \dots, C(t_n)$ é uma progressão geométrica de razão $2^{-\frac{r}{4}}$.

Questão 05

Os candidatos de um concurso foram submetidos a uma prova de 100 questões, consistindo cada uma delas de uma afirmação a ser assinalada como verdadeira ou como falsa. O total de pontos de cada candidato foi obtido **somando-se 5 para cada acerto e subtraindo-se 2 para cada erro e 1 para cada questão sem resposta.**

Com base nessas informações, pode-se afirmar:

(01) O total de pontos obtidos por cada candidato é um número inteiro pertencente ao intervalo $[0, 500]$.

(02) Se um candidato obteve zero ponto, então ele acertou mais do que uma questão.

(04) Se $A = (5, -2, -1)$ e $B = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$, sendo x, y e z , respectivamente, o número de acertos, erros

e questões sem resposta de um candidato, então sua pontuação é o único elemento da matriz $A.B$.

(08) É possível que um candidato tenha obtido 115 pontos, errando exatamente 37 questões.

(16) Se um candidato obteve 231 pontos, com o número de acertos igual ao número de erros mais o dobro do número de questões sem resposta, então o produto entre o número de acertos e o de erros é igual a 1357.

(32) Se um candidato assinala aleatoriamente cada afirmação como verdadeira ou como falsa, sem deixar nenhuma sem resposta, então a probabilidade de esse candidato acertar todas as questões é igual a $\frac{1}{100}$.

RESOLUÇÃO:

Fazendo x, y e z , respectivamente, o número de acertos, erros e questões sem resposta de um

candidato, temos o sistema: $\begin{cases} x + y + z = 100 \\ N = 5x - 2y - z \end{cases}$. Como x, y e z representam quantidades de questões e

$x + y + z = 100$, **cada um desses números é natural e menor ou igual a 100**

(01) Falso.

Se ele errar todas as questões o seu número de pontos será: $N = 0 - 200 - 0 = -200 \Rightarrow$ o total de pontos obtidos por cada candidato é um número inteiro pertencente ao intervalo $[-200, 500]$.

(02) Verdadeiro.

$$\begin{cases} x + y + z = 100 \\ 5x - 2y - z = 0 \end{cases} \Rightarrow 6x - y = 100 \Rightarrow x = \frac{y + 100}{6}, \text{ sendo acertou mais de uma questão. sendo } x \text{ um}$$

número natural menor ou igual a 100, conclui-se que o candidato que obteve zero ponto, acertou mais de uma questão.

(04) Verdadeiro.

$$A \cdot B = (5, -2, -1) \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = (5x - 2y - z)$$

(08) Verdadeiro.

$$\begin{cases} x + y + z = 100 \\ N = 5x - 2y - z \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x + 37 + z = 100 \\ 5x - 74 - z = 115 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 6x - 37 = 215 \\ 6x = 252 \end{cases} \Rightarrow \{x = 42, y = 37 \text{ e } z = 21\}.$$

(16) Verdadeiro.

$$\begin{cases} x + y + z = 100 \\ 5x - 2y - z = 231 \\ x = y + 2z \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x + y + z = 100 \\ 5x - 2y - z = 231 & [1_1 \times (-5) + 1_2 \text{ e } 1_1 \times (-1) + 1_3] \\ x - y - 2z = 0 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} x + y + z = 100 \\ -7x - 6z = -269 \\ -2y - 3z = -100 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x + y + z = 100 \\ 7x + 6z = 269 & [1_3 \times 2 + 1_2] \\ -2y - 3z = -100 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x + y + z = 100 \\ 7x + 6z = 269 \\ 3x = 69 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} x = 23 \\ 6z = 269 - 161 \Rightarrow z = 18 \Rightarrow x \cdot y = 1357 \\ y = 100 - 41 = 59 \end{cases}$$

(32) Falso.

Em cada questão $p(V) = p(F) = \frac{1}{2}$ (probabilidade de, em uma questão, o aluno marcar o item verdadeiro).

Então a probabilidade de um candidato acertar todas as questões, é: $\left(\frac{1}{2}\right)^{100}$.

Questão 06

O quadro a seguir apresenta todas as medalhas ganhas por países da América do Sul durante os jogos olímpicos de Atenas realizados no ano 2004. Dos 12 países sul-americanos, apenas um não participou do evento.

País	Número de medalhas			
	Ouro	Prata	Bronze	Total
Brasil	5	2	3	10
Argentina	2	0	4	6
Chile	2	0	1	3
Paraguai	0	1	0	1
Venezuela	0	0	2	2
Colômbia	0	0	2	2
Total	9	3	12	24

Com base nas informações apresentadas e considerando-se o quadro de medalhas, é correto afirmar:

- (01) Do total de medalhas conquistadas, 37,5% foram de ouro.
 (02) A média do número de medalhas de prata conquistadas pelos seis países do quadro é igual a 0,5.
 (04) O desvio-padrão do número de medalhas de bronze conquistadas pelos seis países do quadro é igual a $\sqrt{\frac{5}{3}}$.
 (08) A mediana do número de medalhas conquistadas pelos seis países do quadro é igual a 2.
 (16) Dos países sul-americanos participantes do evento, 50% não ganharam medalha de ouro.
 (32) Considerando-se que o número de medalhas de bronze conquistadas pelo Brasil, nesse evento, foi 50% menor que o obtido na Olimpíada de 2000, então o Brasil conquistou menos que seis medalhas de bronze na Olimpíada de 2000.

RESOLUÇÃO:

(01) Verdadeiro.

$$\frac{n(\text{medalhas de ouro})}{n(\text{medalhas})} = \frac{9}{24} = 0,375 = 37,5\%$$

(02) Verdadeiro.

$$x = \frac{3}{6} = 0,5$$

(04) Verdadeiro.

País	Bronze	d^2
Brasil	3	$1^2 = 1$
Argentina	4	$2^2 = 4$
Chile	1	$1^2 = 1$
Paraguai	0	$2^2 = 4$
Venezuela	2	$0^2 = 0$
Colômbia	2	$0^2 = 0$
Total	12	10
x (média)	12:6 = 2	

$$dp = \sqrt{\frac{10}{6}} = \sqrt{\frac{5}{3}}$$

(08) Falso.

Colocando em ordem crescente o número de medalhas conquistadas pelos seis países do quadro temos a seqüência: 1, 2, 2, 3, 6, 10 que não tem termo médio, logo a mediana do número de

medalhas conquistadas é: $\frac{2+3}{2} = 2,5$

(16) Falso.

Dos 6 países sul-americanos participantes do evento, CONSTANTES DA TABELA, 3 não ganharam medalha de ouro, logo 50%. Mas, foram 11 os países que participaram do evento, logo a

porcentagem relativa ao item 16 é: $\frac{3}{11} = 0,272727... \cong 27\%$.

(32) Falso.

O número de medalhas de bronze conquistadas pelo Brasil, nesse evento, foi 3 que representa exatamente 50% das 6 conquistadas em 2000.

Questão 07

Em relação a um prisma pentagonal regular, é correto afirmar:

(01) O prisma tem 15 arestas e 10 vértices.

(02) Dado um plano que contém uma face lateral, existe uma reta que não intercepta esse plano e contém uma aresta da base.

(04) Dadas duas retas, uma contendo uma aresta lateral e outra contendo uma aresta da base, elas são concorrentes ou reversas.

(08) A imagem de uma aresta lateral por uma rotação de 72° em torno da reta que passa pelo centro de cada uma das bases é outra aresta lateral.

(16) Se o lado da base e a altura do prisma medem, respectivamente, 4,7cm e 5,0cm, então a área lateral do prisma é igual a 115cm^2 .

(32) Se o volume, o lado da base e a altura do prisma medem, respectivamente, $235,0\text{cm}^3$, 4,7cm e 5,0cm, então o raio da circunferência inscrita na base desse prisma mede 4,0cm.

RESOLUÇÃO:

(01) Verdadeiro.

O prisma pentagonal tem 10 arestas nas duas bases e mais 5 arestas laterais, ao todo 15 arestas e 10 vértices.

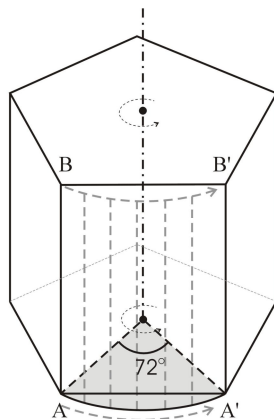
(02) Falso.

Se o plano que contém uma face lateral, ele contém também uma aresta da base, e sendo as bases do prisma em questão, são pentágonos regulares, as arestas das mesmas estão contidas em retas concorrentes.

(04) Verdadeiro.

(08) Verdadeiro.

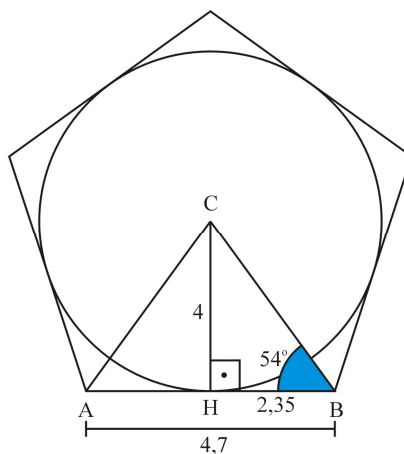
Resposta justificada pela figura abaixo (Aplicando à da aresta \overline{AB} uma rotação de 72° em torno do eixo do prisma, a sua imagem será a aresta $\overline{A'B'}$).



(16) Falso.

$$S\ell = 5 \times 5 \times 4,7 = 117,5 \text{ cm}^2.$$

(32) Falso.



Consultando uma tabela trigonométrica tem-se: $\text{tg} 54^\circ \cong 1,38$.

No triângulo retângulo CHB na figura acima, $\text{tg} 54^\circ = \frac{4}{2,35} \cong 1,7 \neq 1,38$.

Os dados da questão são incoerentes, pois o volume desse prisma não pode ser 235 cm^3 .

Questão 08

Em uma escola, seis meninos e duas meninas disputam uma prova de natação. Cada nadador ocupa uma das oito raias da piscina, numeradas de 1 a 8, e os que obtiverem o primeiro, o segundo e o terceiro lugar subirão ao pódio para premiação.

Com base nessas informações e admitindo-se que não existe a possibilidade de empate, é correto afirmar:

- (01) Existem exatamente 40320 maneiras distintas de distribuir os nadadores nas raias.
- (02) Existem exatamente 720 maneiras distintas de distribuir os nadadores nas raias de modo que a 1 e a 8 sejam ocupadas por meninas.
- (04) Existem exatamente 336 formações distintas para o pódio.

(08) Existem exatamente 60 formações distintas para o pódio com dois meninos e uma menina.

(16) Se for sorteado um nadador para ocupar a raia 1, a probabilidade de ser menino é igual a $\frac{6}{8}$.

(32) Sorteando-se os nadadores para definir suas posições nas raias, a probabilidade de que os meninos ocupem as raias de 1 a 6 é igual a $\frac{1}{28}$.

RESOLUÇÃO:

(01) Verdadeiro.

O número de maneiras distintas de distribuir os nadadores nas raias é dado por $8! = 40320$.

(02) Falso.

O número de maneiras distintas de distribuir os nadadores nas raias de modo que a 1 e a 8 sejam ocupadas por meninas é $2! \times 6! = 2 \times 720 = 1440$.

(04) Verdadeiro.

Existem exatamente $A_{8,3} = 8 \times 7 \times 6 = 336$ formações distintas para o pódio.

(08) Falso.

Colocação	1 ^o	2 ^o	3 ^o		1 ^o	2 ^o	3 ^o				
Possibilidades	2	× 6	× 5	ou	6	× 2	× 5	ou	6	× 5	× 2

Existem exatamente $3 \times (2 \times 6 \times 5) = 180$ formações distintas para o pódio com dois meninos e uma menina.

(16) Verdadeiro.

Pois no universo de 8 nadadores, 6 são meninos.

(32) Verdadeiro.

O número total de maneiras diferentes de disposição dos nadadores de dispor os nadadores nas raias é igual a: $8!$.

O número total de maneiras diferentes de sorteando-se os nadadores para definir suas posições nas raias, os meninos ocuparem as raias de 1 a 6 é igual a: $6! \times 2!$.

A probabilidade de que os meninos ocupem as raias de 1 a 6 é igual a $\frac{6 \times 2!}{8!} = \frac{2}{8 \times 7} = \frac{1}{28}$.

Questão 09

No plano cartesiano, considere a reta r que passa pelos pontos $P(24, 0)$ e $Q(0, 18)$ e a reta s , perpendicular a r , que passa pelo ponto médio de P e Q .

Assim sendo, determine a hipotenusa do triângulo cujos vértices são o ponto Q e os pontos de intersecção da reta s com a reta r e com o eixo Oy .

RESOLUÇÃO:

A r , que passa pelos pontos $P(24, 0)$ e $Q(0, 18)$, tem equação da forma $y = ax + 18$, onde,

$$a = \frac{y_P - y_Q}{x_P - x_Q} = \frac{-18}{24} = -\frac{3}{4} \Rightarrow \text{a equação da reta}$$

$$r \text{ é: } y = -\frac{3}{4}x + 18.$$

A reta s perpendicular à reta r passando por $M(12,9)$, ponto médio de P e Q é um número

$$m, \text{ tal que o produto } a \cdot m = -1 \Rightarrow m = \frac{4}{3}.$$

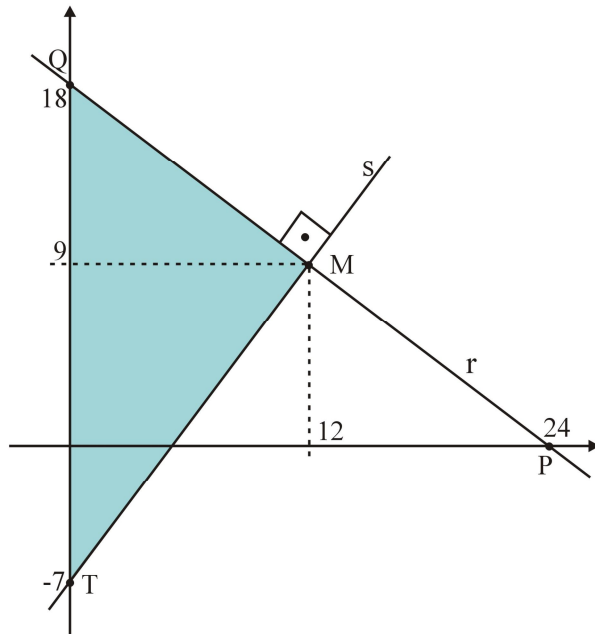
Assim a equação da reta s tem a forma:

$$y = \frac{4}{3}x + n.$$

Como s passa no ponto $M(12,9)$:

$$\frac{4}{3} \times 12 + n = 9 \Rightarrow n + 16 = 9 \Rightarrow n = -7 \Rightarrow a$$

$$\text{equação da reta } s \text{ é: } y = \frac{4}{3}x - 7.$$



A hipotenusa do triângulo retângulo TMQ é o segmento \overline{QT} cuja medida é: $18 - (-7) = 25$.

RESPOSTA: A hipotenusa do triângulo cujos vértices são o ponto Q e os pontos de intersecção da reta s com a reta r e com o eixo Oy mede $25u.c.$

Questão 10

Um capital aplicado no prazo de dois anos, a uma taxa de juros compostos de 40% ao ano, resulta no montante de R\$ $9.800,00$.

Sendo $x\%$ a taxa anual de juros simples que, aplicada ao mesmo capital durante o mesmo prazo, resultará no mesmo montante, determine x .

RESOLUÇÃO:

O capital C , aplicado no prazo de dois anos, a uma taxa de juros compostos de 40% ao ano, resulta

$$\text{no montante de R\$ } 9.800,00, \text{ tem-se: } 9.800 = 1,4^2 C \Rightarrow C = \frac{9.800}{1,96} = 5.000.$$

Se o capital de R\$ $5.000,00$ deve ser aplicado a uma taxa anual de $x\%$, no regime de juros simples, durante 2 anos, de modo a render um montante de R\$ $9.800,00$, tem-se:

$$9.800 = 5.000 + 2 \times 5.000 \times \frac{x}{100} \Rightarrow 100x = 4.800 \Rightarrow x = 48.$$

RESPOSTA: O valor de x é 48 .