

QUESTÕES de 01 a 08

INSTRUÇÃO: Assinale as proposições verdadeiras, some os números a elas associados e marque o resultado na Folha de Respostas.

Questão 01

Uma pessoa contraiu um empréstimo no valor de R\$1.000,00 para ser quitado, no prazo de dois meses, com pagamento de R\$1.300,00.
Com base nessa informação, é correto afirmar:

- (01) A taxa bimestral de juros é de 30%.
(02) A taxa mensal de juros simples é de 13%.
(04) A taxa mensal de juros compostos é de 15%.
(08) Em caso de atraso do pagamento, considerando-se a taxa mensal de juros simples de 16,2% incidindo sobre o valor da dívida na data do vencimento, o valor da dívida, no 10o dia de atraso, será igual a R\$1.370,20.
(16) Em caso de a dívida ser quitada 15 dias antes do vencimento, aplicando-se a taxa de desconto simples de 7% ao mês, o valor pago será de R\$1.209,00.

RESOLUÇÃO:

(01) **VERDADEIRO.**

Considerando x como taxa do bimestre.

$$1300 = 1000 \cdot (x+1)^2 \Rightarrow (x+1)^2 = 1,30 \Rightarrow x = 30\%.$$

(02) **FALSO.**

Se a taxa mensal for de juros simples

$$1300 = 1000 + 1000 \cdot x \cdot 2 \Rightarrow 20x = 3 \Rightarrow x = 0,15 = 15\%$$

(04) **FALSO.**

Como a taxa bimestral é de 30% $\Rightarrow (x+1)^2 = 1,30 \Rightarrow (x+1) = \sqrt{1,30} \cong 1,14... \Rightarrow$

$$x = 0,14\% .$$

(08) **VERDADEIRO.**

No dia do pagamento o valor da dívida é de 1300 reais, então havendo um atraso de 10 dias a taxa mensal de juros

$$D = 1300 + 1300 \cdot 10 \cdot \left(\frac{0,162}{30} \right) \Rightarrow d = 1300 + 1300 \cdot 0,054 = 1370,20$$

(16) FALSO.

$$V_A = \frac{1300}{\left(1 + \frac{0,07}{2}\right)} = \frac{1300}{1 + 0,035} = \frac{1300}{1,035} = 1256,04.$$

Questão 02

Considerando-se a função $f: \mathbf{R} \rightarrow]b, +\infty[$ dada por $f(x) = ca^x + b$, com $a, b, c \in \mathbf{R}$, $c > 0$ e $0 < a \neq 1$, é correto afirmar:

(01) O ponto $(0, b)$ pertence ao gráfico de f .

(02) A função f é crescente se e somente se $a > 1$ e $b > 0$.
 f pode ser crescente se tivermos

(04) A função $g: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ dada por $g(x) = \frac{f(x+1)-b}{f(x)-b}$ é constante.

(08) A função f é inversível e sua inversa é a função $h:]b, +\infty[\rightarrow \mathbf{R}$, dada por $h(x) = \log_a\left(\frac{x-b}{c}\right)$.

(16) A função f pode ser obtida como a composta de uma função afim e uma função exponencial.

(32) A equação $f(x) = b$ tem uma única solução real.

RESOLUÇÃO:

(01) FALSO.

$$f(0) = ca^0 + b = c + b$$

(02) FALSO.

Sendo $a > 1$ a função em questão será crescente mesmo que b seja um número negativo.

(04) VERDADEIRO.

$$g(x) = \frac{ca^{x+1} + b - b}{ca^x + b - b} = \frac{ca^x a}{ca^x} = a$$

(08) VERDADEIRO.

A inversa da função $f(x) = ca^x + b$ é tal que: $x = ca^y + b \Rightarrow$

$$ca^y = x - b \Rightarrow a^y = \frac{x-b}{c} \Rightarrow y = \log_a\left(\frac{x-b}{c}\right) \Rightarrow h(x) = \log_a\left(\frac{x-b}{c}\right)$$

(16) VERDADEIRO.

Consideremos a função afim $g(x) = cx + b$ e a função exponencial $h(x) = a^x$ e a função $f(x) = g(h(x)) \Rightarrow f(x) = g(a^x) = c \cdot a^x + b$

(32) FALSO.

$f(x) = b \Rightarrow c \cdot a^x + b = b \Rightarrow c \cdot a^x = 0$ que é uma equação sem solução porque $a, b, c \in \mathbf{R}, c > 0$ e $0 < a \neq 1$.

Questão 03

Uma caixa contém quatro varetas azuis, medindo 1cm, 3cm, 4cm e 7cm, e três varetas verdes, medindo 2cm, 3cm e 4cm.

Com relação às varetas da caixa, é correto afirmar:

(01) A média aritmética e a mediana dos comprimentos das varetas são iguais.

(02) O desvio-padrão dos comprimentos das varetas verdes é igual a $\frac{2}{3}$.

(04) Escolhendo-se, ao acaso, uma vareta, a probabilidade de ser azul ou ter comprimento maior que 4cm é igual a $\frac{5}{7}$.

(08) Escolhendo-se, ao acaso, duas varetas, sem reposição, a probabilidade de serem da mesma cor é igual a $\frac{3}{7}$.

(16) Existem exatamente nove maneiras distintas de escolher três varetas que formem um triângulo isósceles.

(32) Existem exatamente 5040 maneiras distintas de se enfileirar as varetas.

RESOLUÇÃO:

(01) FALSO.

A média aritmética dos comprimentos é: $\frac{1+3+4+7+2+3+4}{7} = \frac{24}{7}$ cm.

Colocando os comprimentos em ordem crescente temos:

1cm, 2cm, 3cm, **3cm**, 4cm, 4cm, 7cm chegamos a conclusão que a mediana é o valor do comprimento que ocupa a quarta posição ou seja 3cm.

Logo a média aritmética e a mediana dos comprimentos das varetas são diferentes.

(02) FALSO.

As três varetas verdes medem: 2cm, 3cm e 4cm.

A média aritmética dos desses três comprimentos é $\bar{x} = \frac{2+3+4}{3} = 3$.

Desvio = $d_i = x_i - \bar{x}$

Variância = $\frac{d_1^2 + d_2^2 + d_3^2 + \dots + d_n^2}{n} = \frac{(2-3)^2 + (3-3)^2 + (4-3)^2}{3} = \frac{1+0+1}{3} = \frac{2}{3}$

DESVIO PADRÃO = $\sqrt{\text{VARIÂNCIA}} = \sqrt{\frac{2}{3}} \neq \frac{2}{3}$

(04) FALSO.

$$n(E) = 7$$

$$\text{Evento A: ser vareta azul} \Rightarrow n(A) = 4 \Rightarrow p(A) = \frac{4}{7}.$$

$$\text{Evento B: ter comprimento maior que 4cm} \Rightarrow n(B) = 1 \Rightarrow p(B) = \frac{1}{7}.$$

$$\text{Evento } (A \cap B): \text{ ser azul e ter comprimento maior que 4cm} \Rightarrow n(A \cap B) = 1 \Rightarrow p(A \cap B) = \frac{1}{7}.$$

Evento $A \cup B$: ser azul ou ter comprimento maior que 4cm.

$$\text{Logo } p(A \cup B) = p(A) + p(B) - p(A \cap B) = \frac{4}{7} + \frac{1}{7} - \frac{1}{7} = \frac{4}{7}.$$

(08) VERDADEIRO.

Probabilidade de escolhendo-se, ao acaso, duas varetas, sem reposição, a

$$\text{probabilidade de serem azuis: } \frac{4}{7} \times \frac{3}{6} = \frac{2}{7}.$$

Probabilidade de escolhendo-se, ao acaso, duas varetas, sem reposição, a

$$\text{probabilidade de serem verdes: } \frac{3}{7} \times \frac{2}{6} = \frac{1}{7}.$$

Probabilidade de escolhendo-se, ao acaso, duas varetas, sem reposição, a

$$\text{probabilidade de serem da mesma cor: } \frac{2}{7} + \frac{1}{7} = \frac{3}{7}.$$

(16) VERDADEIRO.

Figura 1 -. Quando os lados congruentes são formados pelas varetas de comprimento 3cm, para a vareta x temos as possibilidades: as varetas azuis de 1cm e 4cm ou as varetas verdes de 2cm e 4cm. (4 triângulos).

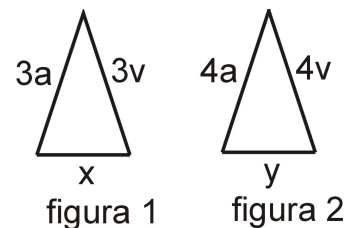


Figura 2 -. Quando os lados congruentes são formados pelas varetas de comprimento 4cm, para a vareta y temos as possibilidades: as varetas azuis de 1cm, 4cm e 7cm ou as varetas verdes de 2cm e 3cm. (5 triângulos).

Existem exatamente $(4 + 5)$ triângulos isósceles.

(32) VERDADEIRO.

Existem exatamente $P_7 = 7! = 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 5040$ maneiras distintas de se enfileirar as varetas.

Questão 04

Considerando-se a matriz $M = k \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, sendo k um número real, é correto afirmar:

(01) M é uma matriz simétrica, para qualquer k .

(02) M é uma matriz inversível se e somente se $k \neq 0$ e, nesse caso,

$$M^{-1} = \frac{1}{k} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

(04) Para algum valor de k , M é a matriz identidade de ordem 2.

(08) Identificando-se um ponto genérico (x, y) do plano cartesiano com a matriz-linha $(x \ y)$ de ordem 1×2 , se $k = 1$ e $(x, y) \neq (0,0)$, então os pontos identificados por $(0, 0)$, (x, y) e $(x, y)M$ são vértices de um triângulo retângulo isósceles.

(16) Dados dois números reais a e b , se $k \neq 0$, então o sistema de equações

$$M \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \text{ tem uma única solução } x = \frac{b}{k}, y = -\frac{a}{k}.$$

RESOLUÇÃO.

(01) FALSO.

M seria uma matriz simétrica, para qualquer k se $a_{12} = a_{21}$ e na matriz em questão apenas será simétrica para $k = 0$.

(02) VERDADEIRO.

Se $k \neq 0$ e $M = k \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -k \\ k & 0 \end{pmatrix}$ uma matriz inversível \Rightarrow

$$M^{-1} = \frac{\begin{pmatrix} 0 & k \\ -k & 0 \end{pmatrix}}{k^2} = \begin{pmatrix} 0 & k \\ -k & 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{k} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

(04) FALSO.

Para qualquer valor de $k \neq 0$, $a_{21} = -a_{12}$, logo não existe valor de k que torne $a_{21} = a_{12} = 1$.

(08) VERDADEIRO.

Sejam os pontos $A = (0, 0)$, $B = (x, y)$ e $C = (x, y)M = (x, y) \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y \\ -x \end{pmatrix} = (y, -x)$.

$$AB = \sqrt{x^2 + y^2} = AC = \sqrt{x^2 + y^2} \text{ e } BC = \sqrt{(x-y)^2 + (y+x)^2} = \sqrt{2x^2 + 2y^2} \Rightarrow$$

$$AB^2 + AC^2 = (\sqrt{x^2 + y^2})^2 + (\sqrt{x^2 + y^2})^2 = 2x^2 + 2y^2 = (\sqrt{2x^2 + 2y^2})^2 = BC^2 \Rightarrow \text{que o triângulo } ABC \text{ é um triângulo retângulo isósceles.}$$

(16) **VERDADEIRO.**

$$M \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 0 & -k \\ k & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} -ky = a \\ kx = b \end{cases} \Rightarrow \left\{ x = \frac{b}{k}, y = -\frac{a}{k} \right\}.$$

Com $k \neq 0$ o par $\left(\frac{b}{k}, -\frac{a}{k}\right)$ constitui a única solução do sistema.

Questão 05

Seja r a reta no plano cartesiano representada pela equação $2x + 3y = 5$, é correto afirmar:

(01) A reta paralela à reta r que passa pelo ponto $(-3, 0)$ pode ser representada pela equação $2x + 3y = -6$.

(02) A reta perpendicular à reta r que passa pela origem pode ser representada pela equação $-3x + 2y = 0$.

(04) Para cada $c \in \mathbf{R} - \left\{\frac{5}{2}\right\}$, existe uma única circunferência com centro $(c, 0)$ que é tangente à reta r .

(08) O triângulo cujos vértices são a origem e os pontos de interseção da reta r com os eixos coordenados tem área igual a $\frac{25}{12}$ unidades de área.

(16) A imagem da reta r pela rotação de ângulo de 60° , em torno do ponto $\left(\frac{5}{2}, 0\right)$, no sentido anti-horário, coincide com o eixo das abscissas.

(32) Dado um ponto $(a, b) \notin r$, existem infinitas circunferências de centro (a, b) que interceptam r .

RESOLUÇÃO:

(01) **VERDADEIRO.**

$$r: 2x + 3y = 5 \Rightarrow r: y = -\frac{2x}{3} + \frac{5}{3} \Rightarrow \text{que o coeficiente angular de } r \text{ é } a = -\frac{2}{3}.$$

Toda reta paralela à reta r é da forma $y = -\frac{2x}{3} + b$.

$$\text{Então se uma reta é paralela a } r \text{ e passa pelo ponto } (-3, 0) \Rightarrow -\frac{2(-3)}{3} + b = 0 \Rightarrow$$

$$b = -2 \Rightarrow y = -\frac{2x}{3} - 2 \Rightarrow 2x + 3y = -6.$$

Observação: Poderíamos ver mais rapidamente que as retas em foco são paralelas, notando a proporcionalidade entre os coeficientes de x e y .

(02) **VERDADEIRO.**

Toda reta perpendicular à reta r tem coeficiente angular igual a $\frac{3}{2}$, porque o produto dos coeficientes angulares de duas retas perpendiculares é igual a -1 .

Assim toda reta perpendicular a r tem a equação reduzida do tipo $y = \frac{3}{2}x + b$.

Como a reta procurada passa pela origem, temos que $b = 0$ e $y = \frac{3}{2}x \Rightarrow$

$$-3x + 2y = 0 .$$

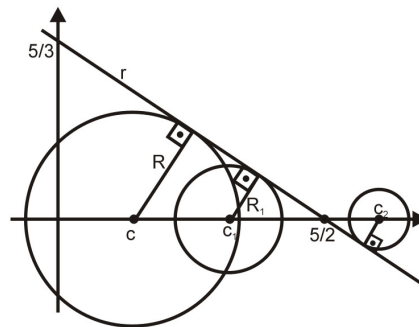
(04) **VERDADEIRO.**

Determinemos as interseções de $r: 2x + 3y = 5$ com os eixos coordenados atribuindo a x e y o valor 0: $(0, \frac{5}{3})$ e $(\frac{5}{2}, 0)$.

Através desses pontos determinamos o gráfico da reta r e podemos ver que, para

todo $(c,0)$, $c \neq \frac{5}{2}$ existe uma única

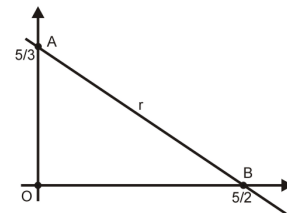
circunferência de centro $(c,0)$ e de raio igual à distância desse ponto à reta r .



(08) **VERDADEIRO.**

A área do triângulo AOB é:

$$S = \frac{\frac{5}{2} \times \frac{5}{3}}{2} = \frac{25}{12}$$



(16) **FALSO.**

$$\operatorname{tg}(\widehat{A\hat{B}O}) = \frac{\frac{5}{3}}{\frac{5}{2}} = \frac{2}{3} \Rightarrow \operatorname{medida}(\widehat{A\hat{B}O}) = \operatorname{arctg}\left(\frac{2}{3}\right) \neq 60^\circ$$

(32) **VERDADEIRO.**

Todas as infinitas circunferências com centro no ponto $(a, b) \notin r$ cujo raio é maior ou igual à distância do ponto (a,b) à reta r interceptam esta reta.

Questão 06

Considerando-se um cubo com centro em um ponto P , é correto afirmar:

(01) Existem exatamente 16 segmentos de reta cujos extremos são vértices do cubo e que não são arestas do cubo .

(02) Existem exatamente seis triângulos cujos vértices são o ponto P e dois vértices não consecutivos do cubo.

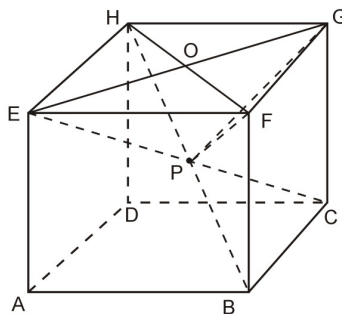
(04) Existem exatamente 12 tetraedros cujos vértices são o ponto P e três vértices de uma mesma face do cubo.

(08) A razão entre as medidas da diagonal e do lado do cubo é igual a $\sqrt{3}$.

(16) Qualquer triângulo cujos vértices sejam também vértices do cubo é um triângulo retângulo.

(32) O volume do cubo é igual a seis vezes o volume de uma pirâmide cujos vértices são o ponto P e os vértices de uma mesma face do cubo.

RESOLUÇÃO:



(01) **VERDADEIRO.**

Um cubo tem 8 vértices. O número de segmentos com extremidades nesses vértices excluindo todas as arestas, é: $C_{8,2} - 12 = \frac{8 \times 7}{2} - 12 = 28 - 12 = 16$.

(02) **FALSO.**

Considerando os vértices da face ABCD podemos apenas formar dois triângulos que atendem às condições dadas: PAC e PBD. O que se verifica em cada face. Logo o número de triângulos, satisfazendo às condições estabelecidas, é $2 \times 6 = 12$ e não 6.

(04) **FALSO.**

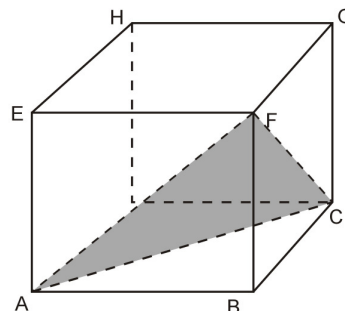
Considerando a face EFGH do cubo acima, vemos que com três quaisquer dos seus vértices podemos formar $C_{4,3} = \frac{4 \times 3 \times 2}{3 \times 2} = 4$ triângulos. Cada um desses 4 triângulos é base de um tetraedro de vértice P. Como temos 6 faces, o número total de tetraedros é $6 \times 4 = 24$.

(08) **VERDADEIRO.**

Considerando D como a medida da diagonal do cubo e a como a medida de sua aresta, e sabendo que em função da aresta $D = a\sqrt{3}$, então $\frac{D}{a} = \frac{a\sqrt{3}}{a} = \sqrt{3}$.

(16) FALSO.

Dos $C_{8,3} = \frac{8 \times 7 \times 6}{3 \times 2} = 56$ triângulos cujos vértices são também vértices do cubo existem triângulos retângulos e triângulos não retângulos como por exemplo, o triângulo AFC, onde $AF = AC = a\sqrt{2}$ e $AC = a\sqrt{3}$ que não satisfazem ao Teorema de Pitágoras

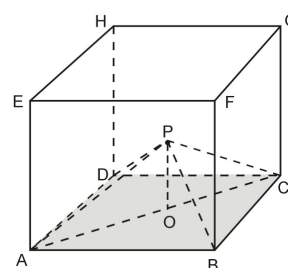


(32) VERDADEIRO.

O volume da pirâmide de base ABCD e altura $PO = \frac{a}{2}$ é

$$V = \frac{1}{3} \times a^2 \times \frac{a}{2} = \frac{a^3}{6}.$$

$$6V = 6 \times \frac{a^3}{6} = a^3 \text{ que é o volume do cubo.}$$



Questão 07

Considerando-se uma seqüência de números reais $a_1, a_2, a_3, \dots, a_n, \dots$, com $a_{13} = 72$ e $a_{15} = 18$, é correto afirmar:

(01) Se a seqüência é uma progressão aritmética, então todos os termos são positivos.

(02) Se $a_{14} = 30$, então a seqüência não é uma progressão aritmética nem uma progressão geométrica.

(04) Se a seqüência é uma progressão aritmética, então a soma dos 15 primeiros termos é igual a 3105.

(08) Se a seqüência é uma progressão geométrica, então $a_{121} = \pm \frac{a_{120}}{2}$

(16) Se a seqüência é uma progressão geométrica, então a seqüência $\log |a_1|, \log |a_2|, \log |a_3|, \dots, \log |a_n|, \dots$, é uma progressão aritmética.

(32) Se a seqüência satisfaz a fórmula de recorrência $a_{n+1} = \frac{a_n}{3} + \frac{30}{4}$, então

$$a_{12} = \frac{387}{2}.$$

RESOLUÇÃO:

(01) FALSO.

$a_{15} = a_{13} + (15 - 13) \times r \Rightarrow 18 = 72 + 2r \Rightarrow r = -54: 2 = -27 \Rightarrow$ a P.A. é decrescente e a partir do termo $a_{16} = 18 - 27 = -9$ todos os termos são números negativos.

(02) **VERDADEIRO.**

Se a seqüência for uma progressão aritmética teremos $a_{13} + a_{15} = 2a_{14}$ o que não acontece pois $18 + 72 \neq 60$

Se a seqüência for uma progressão geométrica, teremos $a_{13} \times a_{15} = (a_{14})^2$ o que não acontece pois $72 \times 18 \neq 30^2$.

(04) **VERDADEIRO.**

Na resolução do item (01) vimos que se a seqüência é uma progressão aritmética, $r = -27$.

$a_{15} = a_1 + (15 - 1)(-27) \Rightarrow 18 = a_1 + (14)(-27) \Rightarrow a_1 = 378 + 18 = 396$, então a soma dos 15 primeiros termos é igual a $S_{15} = \frac{(396 + 18)(-27)}{2} = -3105$.

(08) **VERDADEIRO.**

Se a seqüência é uma progressão geométrica, então

$$a_{13} \times a_{15} = a_{13} \times q^2 \Rightarrow 18 = 72 \times q^2 \Rightarrow q^2 = \frac{1}{4} \Rightarrow q = \pm \frac{1}{2}.$$

Se a seqüência é uma progressão geométrica, então

$$\text{Sendo } a_{121} = a_{120} \times q \Rightarrow a_{121} = \pm \frac{a_{120}}{2}.$$

(16) **VERDADEIRO.**

No item anterior ao considerarmos ser a seqüência uma progressão geométrica, encontramos $q = \pm \frac{1}{2}$. Sendo $a_{13} = 72$, e considerando $q = +\frac{1}{2}$, temos $a_1 \times q^{12} = 72$

$$\Rightarrow a_1 \times \left(\frac{1}{2}\right)^{12} = 72 \Rightarrow a_1 = 72 \times 2^{12} = 9 \times 2^{15}; a_2 = 9 \times 2^{15} \times \left(\frac{1}{2}\right) = 9 \times 2^{14};$$

$$a_3 = 9 \times 2^{14} \times \left(\frac{1}{2}\right) = 9 \times 2^{13} \dots a_n = a_1 \times \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} = 9 \times 2^{15} \times 2^{1-n} = 9 \times 2^{16-n}.$$

$$\log |a_1| = \log |9 \times 2^{14}| = 14 \log 2 + 2 \log 3; \log |a_2| = \log |9 \times 2^{13}| = 13 \log 2 + 2 \log 3;$$

$$\log |a_3| = \log |9 \times 2^{12}| = 12 \log 2 + 2 \log 3, \dots, \log |a_n| = \log |9 \times 2^{16-n}| = (16 - n) \log 2 + 2 \log 3.$$

Analisando cada termo encontrado concluímos que $\log |a_1|, \log |a_2|, \log |a_3|, \dots, \log |a_n|, \dots$, é uma progressão aritmética de razão $-\log 2$.

OUTRA RESOLUÇÃO (Prof. Octamar Marques):

Seja b_n o termo geral da seqüência dada nesta proposição.

$$b_{n+1} = \log |a_{n+1}|.$$

a_n é uma progressão geométrica, temos $b_{n+1} = \log |a_n \cdot q| = \log |a_n| + \log |q| \Rightarrow$

$$b_{n+1} = b_n + \log |q|.$$

Se $\log |q|$ é uma constante, (b_n) é uma P.A.

(32) **VERDADEIRO.**

De acordo com a fórmula de recorrência $a_{n+1} = \frac{a_n}{3} + \frac{30}{4}$, temos que

$$a_{13} = \frac{a_{12}}{3} + \frac{30}{4} \Rightarrow 72 = \frac{a_{12}}{3} + \frac{30}{4} \Rightarrow 864 = 4a_{12} + 90 \Rightarrow 4a_{12} = 774 \Rightarrow a_{12} = \frac{387}{2}.$$

Questão 08

Sendo a média aritmética de três números inteiros positivos distintos igual a 60, pode-se afirmar:

(01) Pelo menos um dos números é menor que 60.

(02) Nenhum dos números é maior que 177.

(04) Se os três números formam uma progressão aritmética, então um dos números é igual a 60.

(08) Se um dos números é igual a 60, então o produto dos três números é menor que 216 000.

(16) Se os três números são primos, então um deles é igual a 2.

(32) Se o máximo divisor comum dos três números é igual a 18, então os números são 36, 54 e 90.

RESOLUÇÃO:

Sendo a média aritmética de três números inteiros positivos distintos igual a 60, pode-se afirmar: $\frac{x_1 + x_2 + x_3}{3} = 60 \Rightarrow x_1 + x_2 + x_3 = 180$

(01) **VERDADEIRO.**

Como os três números são inteiros positivos distintos de soma igual a 180 se os três fossem maiores que 60 a soma ultrapassaria a 180 o que seria um absurdo, logo pelo menos um dos números é menor que 60.

(02) **VERDADEIRO.**

Se um dos números fosse 178 os outros dois teriam que ser iguais a um o que é impossível levando em conta que os números são inteiros positivos distintos.

(04) **VERDADEIRO.**

No caso dos três números formarem uma progressão aritmética podemos representá-los como: $n - r$, n e $n + r$. Teremos então: $n - r + n + n + r = 180 \Rightarrow n = 60$.

(08) **VERDADEIRO.**

$$\begin{cases} x_1 = 60 \\ x_2 + x_3 = 120 \\ x_2 \cdot x_3 = 216000 : 60 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_2 + x_3 = 120 \\ x_2 \cdot x_3 = 3600 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_2 = 60 \\ x_3 = 60 \end{cases}$$

Para $x_1 = x_2 = x_3 = 60$, o valor máximo do produto $x_1 \cdot x_2 \cdot x_3$ é 216 000.

Mas como os três números são distintos, o seu produto é menor que 216 000.

(16) **VERDADEIRO.**

A soma de três números primos e ímpares é um número ímpar. Então para que a soma de três números primos seja par (no caso 180) então um dos três números primos tem que ser par. Portanto um dos três números é 2 que é o único número par que é primo.

(32) **FALSO.**

Os três números poderiam ser: 18, 36 e 54, por exemplo.

QUESTÕES 09 e 10

INSTRUÇÃO: Efetue os cálculos necessários e marque o resultado na Folha de Respostas.

Questão 09

Em um terreno plano horizontal, está fixado um mastro vertical com 13,5 metros de altura. Do topo do mastro, é lançado um projétil, descrevendo uma trajetória de modo que sua altura, em relação ao terreno, é uma função quadrática de sua distância à reta que contém o mastro. O projétil atinge a altura de 16 metros, quando essa distância é de 3 metros, e atinge o solo, quando a distância é de 27 metros.

Determine, em metros, a altura máxima alcançada pelo projétil.

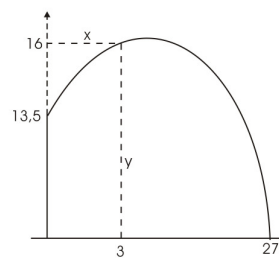
RESOLUÇÃO:

$$y = ax^2 + bx + c \Rightarrow y = ax^2 + bx + 13,5.$$

$$\text{Se } x = 3 \Rightarrow y = 16 \Rightarrow$$

Como os pares (3,16) e (27,0) satisfazem à função:

$$\begin{cases} 9a + 3b + 13,5 = 16 \\ 729a + 27b + 13,5 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 9a + 3b = 2,5 \\ 729a + 27b = -13,5 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 729a + 243b = 202,5 \\ 729a + 27b = -13,5 \end{cases}$$



$$\begin{cases} 216b = 216 \\ b = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 729a = -40,5 \\ a = -\frac{1}{18} \end{cases} \Rightarrow f(x) = -\frac{1}{18}x^2 + x + 13,5 \Rightarrow y_{\max} \text{ para } x = \frac{-1}{-\frac{1}{9}} = 9$$

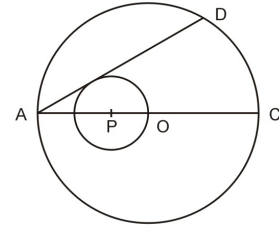
$$y_{\max} = \left(-\frac{1}{18}\right)(9^2) + 9 + 13,5 = -4,5 + 22,5 = 18$$

RESPOSTA: A altura máxima atingida foi 18m

Questão 10

A figura representa a circunferência com centro no ponto O e diâmetro AC medindo 168cm.

Sabendo que o ângulo \widehat{BOC} mede 60° , determine a medida, em centímetros, do raio da circunferência de centro $P \in AC$ que tangencia o segmento AB e passa pelo ponto O.



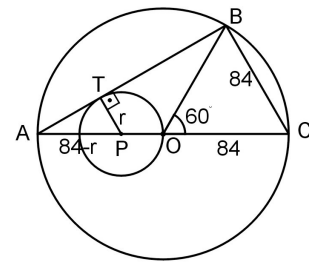
RESOLUÇÃO 1:

O triângulo BOC é equilátero.

O triângulo ABC é retângulo (inscrito numa semi-circunferência).

$$\Delta ATP \sim \Delta ABC \Rightarrow$$

$$\frac{BC}{AC} = \frac{PT}{AP} \Rightarrow \frac{84}{168} = \frac{1}{2} = \frac{r}{84-r} \Rightarrow 2r = 84 - r \Rightarrow 3r = 84 \Rightarrow r = 28$$



RESPOSTA: O raio da circunferência de centro $P \in AC$ mede 28 cm .

RESOLUÇÃO 2 (Prof. Octamar Marques):

$$AC = 2R = 168 \text{ cm} \Rightarrow R = 84 \text{ cm.}$$

$$\widehat{BC} = 60^\circ \Rightarrow \widehat{BAC} = 30^\circ.$$

T é o ponto de tangência entre \overline{AB} e a circunferência de centro P $\Rightarrow \overline{PT} \perp \overline{AB}$, no triângulo retângulo ATP, temos:

$$\text{sen } \widehat{BAC} = \frac{PT}{AP} \Rightarrow \text{sen } 30^\circ = \frac{r}{R-r} \Rightarrow \frac{1}{2} = \frac{r}{84-r}.$$

Finalmente $r = 28 \text{ cm}$

