PROVA DE MATEMÁTICA DA FUVEST VESTIBULAR– 2011– 2ª Fase

RESOLUÇÃO: Profa. Maria Antônia Gouveia.

CONHECIMENTOS GERAIS

QUESTÃO 01

a) Quantos são os números inteiros positivos de quatro algarismos, escolhidos sem repetição, entre 1, 3, 5, 6, 8, 9?

b) Dentre os números inteiros positivos de quatro algarismos citados no item a), quantos são divisíveis por 5?

c) Dentre os números inteiros positivos de quatro algarismos citados no item a), quantos são divisíveis por 4?

RESOLUÇÃO:

a)

	UM	C	D	U
Possibilidades	6	5	4	3
Total de possibilidade	$6 \times 5 \times 4 \times 3 = 360$			

RESPOSTA: 360 números.

b) Entre os números formados no item a, os que são divisíveis por 5, têm fixo na unidade o algarismo 5, logo:

	UM	C	D	U
Possibilidades	5	4	3	1
Total de possibilidade	$5 \times 4 \times 3 \times 1= 60$			

RESPOSTA: 60 números.

c) Entre os números formados no item a, os que são divisíveis por 4, são os pares que terminam em 16, 36, 56, 68, 96, logo, 5 possibilidades para formar as duas primeiras ordens.

Escolhida uma dessas terminações, somente restam para as outras duas ordens, 4 algarismos

Temos dois casos:

I- Terminando em 6 e com 1, 3, 5 ou 9 na ordem da dezena:

	UM	C	D	U
Possibilidades	4	3	5	
Total de possibilidade	$4 \times 3 \times 5= 60$			

RESPOSTA:60 números.

QUESTÃO 02

No plano cartesiano 0xy, considere a parábola P de equação $y = -4x^2 + 8x + 12$ e a reta r de equação $y = 3x + 6$.

Determine:

a) Os pontos A e B, de intersecção da parábola P com o eixo coordenado Ox, bem como o vértice V da parábola P.

b) O ponto C, de abscissa positiva, que pertence à intersecção de P com a reta r.

c) A área do quadrilátero de vértices A, B, C e V.

RESOLUÇÃO:

a) A parábola P intercepta o eixo coordenado Ox nos pontos $A = (x_1, 0)$ e $B = (x_2, 0)$ onde x_1 e x_2 são raízes da equação $y = -4x^2 + 8x + 12$.

$-4x^2 + 8x + 12 = 0 \Rightarrow x = \dfrac{-8 \pm \sqrt{64+192}}{-8} = \dfrac{-8 \pm 16}{-8} \Rightarrow x_1 = -1 \text{ e } x_2 = 3 \Rightarrow A = (-1, 0)$ e $B = (3, 0)$.

O vértice da parábola é o ponto $V = \left(\dfrac{-b}{2a}, \dfrac{-\Delta}{4a}\right) = \left(\dfrac{-8}{-8}, \dfrac{-256}{-16}\right) = (1,\ 16)$

RESPOSTA: A = (–1, 0), B = (3, 0) e V = (1,16).

b) Para determinar os pontos de interseção da parábola P de equação $y = -4x^2 + 8x + 12$ com a reta r de equação $y = 3x + 6$, resolve-se o sistema: $\begin{cases} y = -4x^2 + 8x + 1 \\ y = 3x + 6 \end{cases}$.

$$\begin{cases} y = -4x^2 + 8x + 12 \\ y = 3x + 6 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -4x^2 + 8x + 12 = 3x + 6 \\ -4x^2 + 5x + 6 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = \dfrac{-5 \pm \sqrt{25+96}}{-8} \\ x = -\dfrac{3}{4} \text{ ou } x = 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = -\dfrac{3}{4} \Rightarrow y = \dfrac{15}{4} \\ x = 2 \Rightarrow y = 12 \end{cases}$$

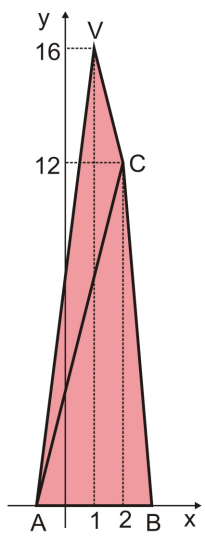
RESPOSTA: Logo o ponto de interseção C com abscissa positiva é (2, 12).

c)

A área do quadrilátero ABCV é igual à soma das áreas dos triângulos ABC e ACV:

$$S = \frac{1}{2}\left(\begin{vmatrix} x_A & y_A & 1 \\ x_B & y_B & 1 \\ x_C & y_C & 1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} x_A & y_A & 1 \\ x_C & y_C & 1 \\ x_V & y_V & 1 \end{vmatrix}\right) = \frac{1}{2}\left(\begin{vmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 3 & 0 & 1 \\ 2 & 12 & 1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 2 & 12 & 1 \\ 1 & 16 & 1 \end{vmatrix}\right) \Rightarrow$$

$$S = \frac{1}{2}\left((36+12) + (-12+32-12+16)\right) = \frac{1}{2}(48+24) = 36\,.$$



RESPOSTA:A área do quadrilátero ABVC é 36 u.a.

PROVA DE CONHECIMENTO ESPECÍFICO – MATEMÁTICA

QUESTÃO 01

Determine o conjunto de todos os números reais x para os quais vale a desigualdade
$\left|\log_{16}(1-x^2)-\log_4(1+x)\right|<\frac{1}{2}$.

RESOLUÇÃO:

$$\left|\log_{16}(1-x^2)-\log_4(1+x)\right|<\frac{1}{2}\Rightarrow\left|\log_{16}(1-x^2)-2\log_{16}(1+x)\right|<\frac{1}{2}\Rightarrow\left|\log_{16}\frac{(1-x^2)}{(1+x)^2}\right|<\frac{1}{2}\Rightarrow$$

$$\left|\log_{16}\frac{(1-x^2)}{(1+x)^2}\right|<\log_{16}16^{\frac{1}{2}}\Rightarrow\left|\log_{16}\frac{((1+x)(1-x)}{(1+x)^2}\right|<\log_{16}4\Rightarrow\left|\log_{16}\frac{(1-x)}{(1+x)}\right|<\log_{16}4\Rightarrow$$

$$\log_{16}\frac{(1-x)}{(1+x)}>-\log_{16}4 \ \text{ e } \ \log_{16}\frac{(1-x)}{(1+x)}<\log_{16}4\Rightarrow\frac{(1-x)}{(1+x)}>\frac{1}{4} \ \text{ e } \ \frac{(1-x)}{(1+x)}<4\Rightarrow$$

$$\frac{4-4x-1-x}{4(1+x)}>0 \ \text{ e } \ \frac{1-x-4-4x}{1+x}<0\Rightarrow\frac{3-5x}{4(1+x)}>0 \ \text{ e } \ \frac{-3-5x}{1+x}<0\Rightarrow$$

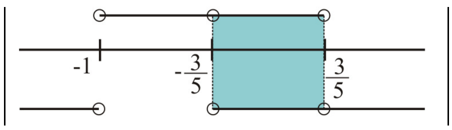
Se $\frac{a}{b}<0\Rightarrow\{(a<0 \text{ e } b>0) \text{ ou } (a>0 \text{ e } b<0)\}$ e se $\frac{a}{b}>0\Rightarrow\{(a<0 \text{ e } b<0) \text{ ou } (a>0 \text{ e } b>0)\}$.

Logo de $\frac{3-5x}{4(1+x)}>0$ e $\frac{-3-5x}{1+x}<0$, tem-se:

$$\{(3-5x>0 \ \text{ e } \ 1+x>0) \text{ ou } (3-5x<0 \ \text{ e } \ 1+x<0)\} \text{ e } \{(-3-5x>0 \ \text{ e } \ 1+x<0) \text{ ou } (-3-5x<0 \ \text{ e } \ 1+x>0)\}\Rightarrow$$

$$\left\{\left(x<\frac{3}{5} \ \text{ e } \ x>-1\right) \text{ou} \left(x>\frac{3}{5} \ \text{ e } \ x<-1\right)\right\} \ \text{ e } \ \left\{\left(x<-\frac{3}{5} \ \text{ e } \ x<-1\right) \text{ou} \left(x>-\frac{3}{5} \ \text{ e } \ x>-1\right)\right\}\Rightarrow$$

$$x\in\left\{\left]-1,\frac{3}{5}\right[\right\}\cap\left\{\left]-\infty,-1\right[\cup\left]-\frac{3}{5},\infty\right[\right\}\Rightarrow$$

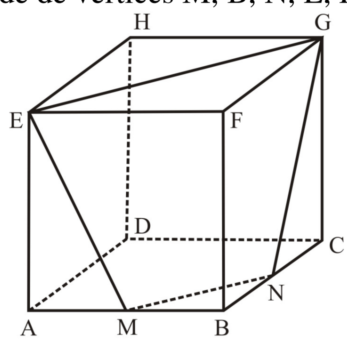


$$\Rightarrow x\in\left]-\frac{3}{5},\frac{3}{5}\right[$$

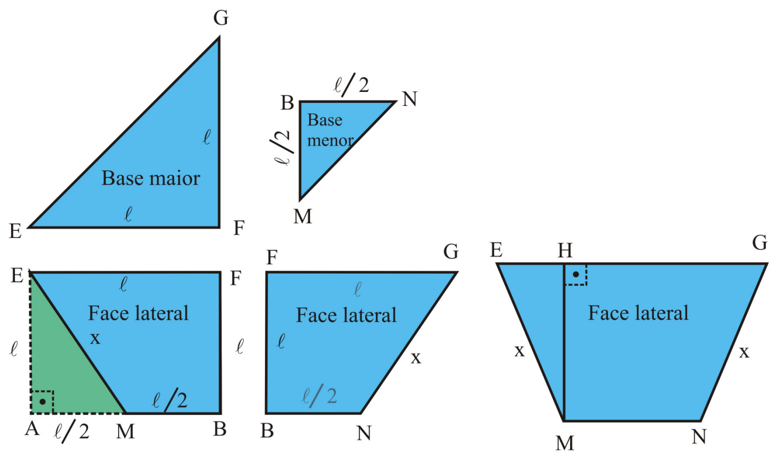
RESPOSTA: $\Rightarrow x\in\left]-\frac{3}{5},\frac{3}{5}\right[$

QUESTÃO 02

Na figura abaixo, o cubo de vértices A, B, C, D, E, F, G, H tem lado ℓ. Os pontos M e N são pontos médios das arestas $\overline{AB}$ e $\overline{BC}$, respectivamente. Calcule a área da superfície do tronco de pirâmide de vértices M, B, N, E, F,G.



RESOLUÇÃO:



As figuras pintadas em azul representam as faces do tronco de pirâmide MBNEFG.

- MNB é um triângulo retângulo isósceles no qual $BM = BN = \frac{\ell}{2}$, então $MN = \sqrt{2\left(\frac{\ell}{2}\right)^2} = \frac{\ell}{2}\sqrt{2}$
- EFG é um triângulo retângulo isósceles no qual $EF = FG = \ell$, então $EG = \sqrt{2\ell^2} = \ell\sqrt{2}$.
- EAM é um triângulo retângulo no qual $EA = \ell$ e $AM = \frac{\ell}{2}$, então $EM = \sqrt{\ell^2 + \left(\frac{\ell}{2}\right)^2} = \sqrt{\frac{5\ell^2}{4}} = \frac{\ell}{2}\sqrt{5}$.
- EHM é um triângulo retângulo no qual $EM = \frac{\ell}{2}\sqrt{5}$, $EH = \frac{\ell\sqrt{2} - \frac{\ell\sqrt{2}}{2}}{2} = \frac{\ell\sqrt{2}}{4}$, então $HM = \sqrt{\left(\frac{\ell}{2}\sqrt{5}\right)^2 - \left(\frac{\ell\sqrt{2}}{4}\right)^2} = \sqrt{\frac{5\ell^2}{4} - \frac{2\ell^2}{16}} = \sqrt{\frac{18\ell^2}{16}} = \frac{3}{4}\ell\sqrt{2}$

Determinação da área do tronco de pirâmide MBNEFG:

$S_{MBNEFG} = S_{MNB} + S_{EFG} + (S_{EMBF} + S_{FBNG}) + S_{EGMN} \Rightarrow$

$$S_{MBNEFG} = \frac{\ell^2}{2} + \frac{\left(\frac{\ell}{2}\right)^2}{2} + \frac{2\left(\ell + \frac{\ell}{2}\right)\ell}{2} + \frac{\left(\ell\sqrt{2} + \frac{\ell\sqrt{2}}{2}\right)\frac{3\ell\sqrt{2}}{4}}{2} \Rightarrow$$

$$S_{MBNEFG} = \frac{\ell^2}{2} + \frac{\ell^2}{8} + \frac{3\ell^2}{2} + \frac{9\ell^2}{8} = \frac{26\ell^2}{8} = \frac{13\ell^2}{4}.$$

RESPOSTA: $\frac{13\ell^2}{4}$

QUESTÃO 03

Para a prova de um concurso vestibular, foram elaboradas 14 questões, sendo 7 de Português, 4 de Geografia e 3 de Matemática. Diferentes versões da prova poderão ser produzidas, permutando-se livremente essas 14 questões.
a) Quantas versões distintas da prova poderão ser produzidas?
b) A instituição responsável pelo vestibular definiu as versões classe A da prova como sendo aquelas que seguem o seguinte padrão: as 7 primeiras questões são de Português, a última deve ser uma questão de Matemática e, ainda mais: duas questões de Matemática não podem aparecer em posições consecutivas. Quantas versões classe A distintas da prova poderão ser produzidas?
c) Dado que um candidato vai receber uma prova que começa com 7 questões de Português, qual é a probabilidade de que ele receba uma versão classe A?

RESOLUÇÃO:

a) Como as 14 questões serão permutadas livremente, poderão ser produzidas $\mathbf{P_{14,14} = 14!}$ **versões diferentes da prova.**

b)

	Nº da questão	1 a 7	8	9	10	11	12	13	14
Possibilidades	Português	$P_{7,7} = 7!$							
	Matemática								3
	Geografia							4	

CÁLCULO DO NÚMERO TOTAL DE MANEIRAS DISTINTAS DE ELABORAÇÃO DA PROVA TIPO CLASSE A.

Considerando que as 7 primeiras questões serão de Português, existem para elas $P_{7,7} = 7!$ maneiras de organização; a última questão tem de ser de Matemática, então para essa questão existem 3 possibilidades; a penúltima questão tem que ser de Geografia, logo para esta questão existem 4 possibilidades.
Assim existem $(7! \times 3 \times 4) = 12 \times 7!$ maneiras de elaborar as questões 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 13 e 14.
Para as questões de 8 a 12 sobraram 2 questões de Matemática e 3 de Geografia num total de $5! = 120$ maneiras distintas incluindo aquelas em que duas questões de Matemática aparecem em posições consecutivas que deverão ser excluídas:

Cálculo do número de questões, entre essas 120, que apresentam duas questões de Matemática em posições consecutivas:

Considerando M_1M_2 como "uma única questão":

Questões	M_1 M_2	G_1	G_2	G_3	Total de possibilidades
Possibilidades	4	3	2	1	$4! = 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 24$
Questões	M_2 M_1	G_1	G_2	G_3	
Possibilidades	4	3	2	1	$4! = 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 24$

Finalmente para as questões de 8 a 12, existe um total de **120 – 48 = 72** possibilidades diferentes.

TOTAL DE QUESTÕES DO TIPO CLASSE A: **$12 \times 7! \times 72 = 7! \times 864$**

RESPOSTA: Poderão ser produzidas $7! \times 864$ versões distintas da prova classe A.

c) Sendo n(U) o número de maneiras diferentes de um aluno receber uma prova começando com 7 questões de Português:

Questão	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
Disciplina	P	P	P	P	P	P	P	M	M	M	G	G	G	G
Possibilidades	7!							7!						

$n(U) = 7! \times 7!$.

Sendo $n(A) = 7! \times 864$ o número de provas tipo classe A, a probabilidade de que um aluno que receba uma prova começando com 7 questões de Português ela seja versão classe A, é:

$$p = \frac{n(A)}{n(U)} = \frac{864 \times 7!}{7! \times 7!} = \frac{864}{7 \times 6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1} = \frac{6}{35}$$

RESPOSTA: A probabilidade de que o aluno receba uma versão classe A é $\frac{6}{35}$

QUESTÃO 04

a) Sendo i a unidade imaginária, determine as partes real e imaginária do número complexo $z_0 = \frac{1}{1+i} - \frac{1}{2i} + i.$

b) Determine um polinômio de grau 2, com coeficientes inteiros, que tenha z_0 como raiz.

c) Determine os números complexos w tais que $z_0 . w$ tenha módulo igual a $5\sqrt{2}$ e tais que as partes real e imaginária de $z_0 . w$ sejam iguais.

d) No plano complexo, determine o número complexo z_1 que é o simétrico de z_0 com relação à reta de equação $y - x = 0$.

RESOLUÇÃO:

$$z_0 = \frac{1}{1+i} - \frac{1}{2i} + i. = \frac{1(1-i)}{(1+i)(1-i)} - \frac{1(-2i)}{2i(-2i)} + i = \frac{1-i}{2} + \frac{i}{2} + i \Rightarrow z_0 = \frac{1}{2} + i$$

RESPOSTA: A parte real de z_0 é $\frac{1}{2}$ e a parte imaginária é 1.

b) Para compor um polinômio de grau 2 a partir de suas raízes utiliza-se a relação:
$p(x) = x^2$ – (soma das raízes)x + produto das raízes.

Sendo o polinômio de grau 2 o polinômio pedido, e tendo $z_0 = \frac{1}{2} + i$ como raiz, terá também $z_1 = \frac{1}{2} - i$ como raiz:

$$p(x) = x^2 - \left(\frac{1}{2} + i + \frac{1}{2} - i\right)x + \left(\frac{1}{2} + i\right)\left(\frac{1}{2} - i\right) \Rightarrow p(x) = x^2 - x + \frac{5}{4}.$$

Mas o polinômio deve ter coeficientes inteiros.

Um dos infinitos polinômios de grau 2 que têm $z_0 = \frac{1}{2} + i$ e $z_1 = \frac{1}{2} - i$ como raízes pode ser determinado encontrando 4p(x):

$$4p(x) = 4\left(x^2 - x + \frac{5}{4}\right) = 4x^2 - 4x + 5 \Rightarrow P(x) = 4x^2 - 4x + 5$$

RESPOSTA: $P(x) = 4x^2 - 4x + 5$

c)

Seja o número complexo w = a + bi.

Sendo iguais as partes real e imaginária de z_0 . w, pode-se representá-lo por m + mi.

Como z_0 . w deve ter módulo igual a $5\sqrt{2}$:

$$|z_0.w| = |m + mi| = \sqrt{m^2 + m^2} = |m|\sqrt{2} \Rightarrow |m|\sqrt{2} = 5\sqrt{2} \Rightarrow |m| = 5 \Rightarrow m = \pm 5$$

Então, $z_0.w = -5 - 5i$ ou $z_0.w = 5 + 5i \Rightarrow$

$$\left(\frac{1}{2} + i\right)(a + bi) = -5 - 5i \quad \text{ou} \quad \left(\frac{1}{2} + i\right)(a + bi) = 5 + 5i \quad \Rightarrow$$

$$\left(\frac{a}{2} - b\right) + \left(\frac{b}{2} + a\right)i = -5 - 5i \quad \text{ou} \quad \left(\frac{a}{2} - b\right) + \left(\frac{b}{2} + a\right)i = 5 + 5i \Rightarrow$$

$$\begin{cases} \frac{a}{2} - b = -5 \\ \frac{b}{2} + a = -5 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a - 2b = -10 \\ b + 2a = -10 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a - 2b = -10 \\ 2b + 4a = -20 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 5a = -30 \\ a = -6 \text{ e } b = 2 \end{cases} \Rightarrow w = -6 + 2i$$

$$\text{ou} \begin{cases} \frac{a}{2} - b = 5 \\ \frac{b}{2} + a = 5 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a - 2b = 10 \\ b + 2a = 10 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a - 2b = 10 \\ 2b + 4a = 20 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 5a = 30 \\ a = 6 \text{ e } b = -2 \end{cases} \Rightarrow w = 6 - 2i$$

RESPOSTA: $w = -6 + 2i$ ou $w = 6 - 2i$.

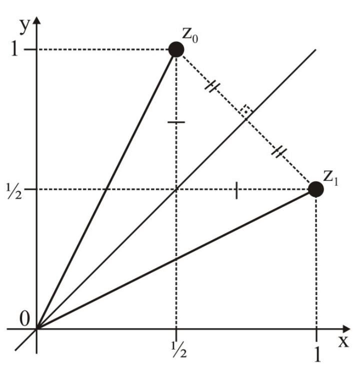
d)

$$z_0 = \frac{1}{2} + i \Rightarrow z_0 = \left(\frac{1}{2}, 1\right).$$

Sendo z_1 o simétrico de z_0 em relação à reta de equação y – x = 0, então,

$$z_1 = \left(1, \frac{1}{2}\right) \Rightarrow z_1 = 1 + \frac{i}{2}$$

RESPOSTA: $z_1 = 1 + \frac{i}{2}$



QUESTÃO 05

As raízes da equação do terceiro grau $x^3 - 14x^2 + kx - 64 = 0$ são todas reais e formam uma progressão geométrica. Determine
a) as raízes da equação;
b) o valor de k.

RESOLUÇÃO:

a) Sendo ss raízes da equação do terceiro grau $x^3 - 14x^2 + kx - 64 = 0$ todas reais e formando uma progressão geométrica, podem ser representadas por:

$x_1 = \frac{a}{q}$, $x_2 = a$ e $x_3 = aq$, com $q \neq 0$.

Pelas leis de Girard: $\frac{a}{q} \times a \times aq = 64$ e $\frac{a}{q} + a + aq = 14$.

$$\begin{cases} a^3 = 64 \\ a = 4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = \frac{4}{q} \\ x_2 = 4 \\ x_3 = 4q \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \frac{4}{q} + 4 + 4q = 14 \\ 4 + 4q + 4q^2 = 14q \\ 4q^2 - 10q + 4 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} q = \frac{10 \pm \sqrt{100-64}}{8} \\ q = \frac{10 \pm 6}{8} \\ q = \frac{1}{2} \text{ ou } q = 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = 2 \\ x_2 = 4 \\ x_3 = 8 \end{cases}$$

RESPOSTA: As raízes da equação são: 2, 4 e 8.

b) Sendo 2, 4 e 8 raízes da equação dada:

$$x^3 - 14x^2 + kx - 64 = 0 \Rightarrow (x-8)(x-2)(x-4) = 0 \Rightarrow (x-8)(x-2)(x-4) = x^3 - 14x^2 + kx - 64$$
$$\Rightarrow x^3 - 14x^2 + 56x - 64 = x^3 - 14x^2 + kx - 64 \Rightarrow k = 56$$

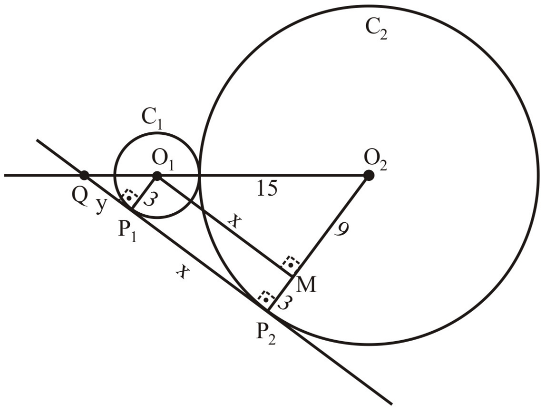
RESPOSTA: k = 56.

QUESTÃO 06

As circunferências C_1 e C_2 estão centradas em O_1 e O_2, têm raios $r_1 = 3$ e $r_2 = 12$, respectivamente, e tangenciam-se externamente. Uma reta é tangente a C_1 no ponto P_1, tangente a C_2 no ponto P_2 e intercepta a reta $\overleftrightarrow{O_1O_2}$ no ponto Q. Sendo assim, determine
a) o comprimento P_1P_2;
b) a área do quadrilátero $O_1O_2P_2P_1$;
c) a área do triângulo QO_2P_2.

RESOLUÇÃO:

Traçando $\overline{O_1M} // \overline{P_1P_2}$:



a) No triângulo O_1MO_2: $x = \sqrt{225 - 81} = \sqrt{144} = 12$

RESPOSTA: P_1P_2 = 12u.c.

b) O quadrilátero $O_1O_2P_2P_1$ é um trapézio de bases P_1O_1, P_2O_2 e altura P_1P_2, então sua área é: $S = \frac{(3+12)12}{2} = 90$

RESPOSTA: 90 u.a.

c) Os triângulos QP_1O_1 e O_1O_2M são semelhantes, então:

$\frac{O_2M}{O_1P_1} = \frac{O_1M}{QP_1} \Rightarrow \frac{9}{3} = \frac{12}{y} \Rightarrow y = 4 \Rightarrow QP_2 = 16$

A área do triângulo QO_2P_2.é : $S = \frac{16 \times 12}{2} = 96$

RESPOSTA: 96u.a.