ESPM – VESTIBULAR 2004_1

NOVEMBRO DE 2003

PROVA DE MATEMÁTICA.

RESOLUÇÃO E COMENTÁRIO POR: PROFA. MARIA ANTÔNIA GOUVEIA

QUESTÃO 21

O valor da expressão $\dfrac{1 - X^8}{(1+X)(1+X^2)(1+X^4)}$ para x = 101 é:

a) –100; b) –10; c) –10,1; d) –101; e) –1000.

Resolução:

$$\frac{1 - X^8}{(1+X)(1+X^2)(1+X^4)} = \frac{(1-x^4)(1+x^4)}{(1+x)(1+x^2)(1+x^4)} = \frac{(1-x^2)(1+x^2)}{(1+x)(1+x^2)} = \frac{(1-x)(1+x)}{(1+x)} = 1 - x$$

Para x = 101 temos 1-x =1-101 - -100

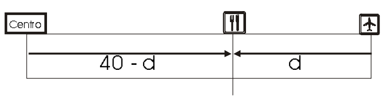
Resposta: a

QUESTÃO 22

Do centro de uma cidade até o aeroporto são 40km por uma grande avenida. Os táxis que saem do aeroporto cobram R\$3,60 pela bandeirada e R\$0,80 por quilômetro rodado. Os que saem do centro cobram R\$2,00 pela bandeirada e R\$0,60 por quilômetro rodado. Dois amigos se encontraram num restaurante que fica nessa avenida, sendo que um tomou o táxi que sai do aeroporto e o outro tomou o que parte do centro e, para surpresa dos dois, os seus gastos foram exatamente iguais. A distância do restaurante ao aeroporto é de:

a) 10km; b) 12km; c) 14km; d) 16km; e) 18km.

Resolução:

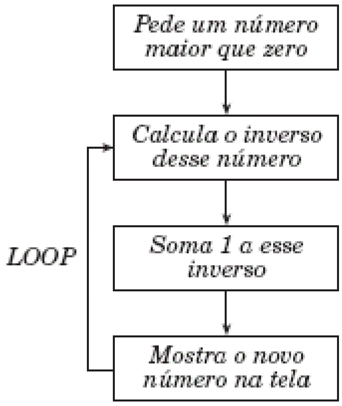


$3,60 + 0,80d = 2 + 0,60(40\text{-}d) \Rightarrow 0,8d + 0,6d = 2 + 24 - 3,6 \Rightarrow 1,4d = 22,4 \Rightarrow d = 16.$

Resposta: d

QUESTÃO 23

Um computador executa um pequeno programa de cálculo seguindo o fluxograma abaixo:



Após um certo número de vezes que o LOOP é repetido, observa-se que o número que aparece na tela é sempre o mesmo, para uma certa quantidade de casas decimais. O valor exato desse número é:

a) $\frac{\sqrt{5}}{2}$ b) $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$ c) $\frac{\sqrt{5}-1}{2}$ d) $\frac{1+\sqrt{5}}{3}$ e) $\frac{\sqrt{5}-1}{3}$

Resolução:

A tela do computador vai sucessivamente mostrando os números que formam a série numérica: a_1, a_2, a_3, ...a_{n-1}, a_n.
Como Após um certo número de vezes que o LOOP é repetido, observa-se que o número que aparece na tela é sempre o mesmo, então $a_{n-1} = a_n$.
Fazendo $a_n = x$, temos que $a_{n-1} = \frac{1}{x} + 1$, como $a_{n-1} = a_n \Rightarrow$ $x = \frac{1}{x} + 1 \Rightarrow$
$x^2 - x - 1 = 0 \Rightarrow x = \frac{1 \pm \sqrt{1+4}}{2} = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$.
Sendo $x > 0 \Rightarrow x = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$
Resposta: b

QUESTÃO 24

A diferença entre o logaritmo decimal da soma de dois números positivos e a soma dos seus logaritmos decimais é igual a –1. A média harmônica entre esses números é:

a) 2; b) 5; c) 10; d) 20; e) 50.

Resolução:

$$\log(x+y) - (\log x + \log y) = -1 \Rightarrow \log(x+y) - \log(xy) = -1 \Rightarrow \log\left(\frac{x+y}{xy}\right) = \log\frac{1}{10} \Rightarrow$$

$$\frac{x+y}{xy} = \frac{1}{10} \Rightarrow \frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{1}{10}$$

A média harmônica entre dois números a e b, não nulos, é dada pela relação:

$$M_h = \left(\frac{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}}{2}\right)^{-1} \Rightarrow M_h = \left(\frac{\frac{1}{x}+\frac{1}{y}}{2}\right)^{-1} = \left(\frac{\frac{1}{10}}{2}\right)^{-1} = \left(\frac{1}{20}\right)^{-1} = 20$$

Resposta: d

QUESTÃO 25

A função $f(x) = \log x^{(4-\log x)}$ assume o máximo valor para x igual a:

a) 10; b) 50; c) 100; d) 500; e) 1000.

Resolução:

O domínio da função $f(x) = \log x^{(4-\log x)}$ é $\Re_+^*$.
$f(x) = \log x^{(4-\log x)} \Rightarrow f(x) = (4-\log x)\log x$.
Fazendo logx = a, temos $f(x) = (4-a)a = -a^2 + 4a$.
$f(x) = -a^2 + 4a$. tem valor máximo para $a = \frac{-4}{-2} = 2 \Rightarrow \log x = 2 \Rightarrow x = 100$.

Resposta: c

QUESTÃO 26

O trigésimo termo da seqüência (1, 2, 4, 7, 11, 16, 22, 29, 37,…) é:

a) 436; b) 452; c) 512; d) 528; e) 536.

Resolução:

Analisando a seqüência (1, 2, 4, 7, 11, 16, 22, 29, 37,…) vemos que:
$a_1 = 1$; $a_2 = a_1 + 1$; $a_3 = a_2 + 2$; $a_4 = a_3 + 3$; $a_5 = a_4 + 4$, $a_6 = a_5 + 5$; .;$a_{30} = a_{29} + 29$.

Donde: $a_2 - a_1 = 1$; $a_3 - a_2 = 2$; $a_4 - a_3 = 3$; $a_5 - a_4 = 4$, $a_6 - a_5 = 5$; .;$a_{30} - a_{29} = 29$.
Somando membro a membro todas estas igualdades :

$$\cancel{a_2} - a_1 + \cancel{a_3} - \cancel{a_2} + \cancel{a_4} - \cancel{a_3} + \cancel{a_5} - \cancel{a_4} + \ldots + a_{30} - \cancel{a_{29}} = 1 + 2 + 3 + 4 + 5 + \ldots. + 29. \Rightarrow$$

$$-a_1 + a_{30} = \frac{(1+29)29}{2} \Rightarrow -1 + a_{30} = 15 \times 29 \Rightarrow a_{30} = 436$$

Resposta: a

QUESTÃO 27

Certo capital foi aplicado a juros compostos durante 2 anos, à taxa de 20% ao ano. Se esse capital tivesse sido aplicado a juros simples, para obter o mesmo rendimento, a taxa mensal deveria ser de aproximadamente:

a) 2%; b) 1,98%; c) 1,94%; d) 1,87%; e) 1,83%.

Resolução:

JUROS COMPOSTOS	JUROS SIMPLES
$C \rightarrow M = 1{,}2^2C$	$C \rightarrow M = C + 24 \times i \times C$

$1{,}2^2C = C + 24iC \Rightarrow 1 + 24i = 1{,}44 \Rightarrow 24i = 0{,}44 \Rightarrow i = 0{,}018333\ldots$

Resposta: e

QUESTÃO 28

Leia com atenção o trecho abaixo, extraído do jornal O Estado de São Paulo de 15/08/03, sobre o lucro da Petrobrás:
"… No segundo trimestre, porém, a empresa sentiu o impacto da redução promovida nos preços da gasolina e do diesel, no dia primeiro de maio, e viu seu lucro cair 31% com relação aos primeiros três meses do ano, passando de … para … O resultado do primeiro semestre, no entanto, representa um aumento de 223% com relação ao lucro do mesmo período do ano anterior, de R$2,9 bilhões."
Com base no exposto, podemos concluir que o lucro da Petrobrás do primeiro trimestre de 2003 foi de, aproximadamente:

a) R$3,8 bilhões;
b) R$4,2 bilhões;
c) R$4,8 bilhões;
d) R$5,5 bilhões;
e) R$6,2 bilhões.

Resolução:

$L_{1º\text{ semestre\_ }2003} = (1+2{,}23)L_{1º\text{ semestre }2002} \Rightarrow$
$L_{1º\text{ semestre\_ }2003} = 3{,}23 \times 2{,}9$ bilhões $= 9{,}367$ bilhões.
$L_{1º\text{ semestre\_ }2003} = L_{1º\text{ trimestre}} + L_{2º\text{ trimestre}} \Rightarrow$
$L_{1º\text{ semestre\_ }2003} = L_{1º\text{ trimestre}} + (1-0{,}31)\, L_{1º\text{ trimestre}} \Rightarrow$
$1{,}69\, L_{1º\text{ trimestre}} = 9{,}367$ bilhões $\Rightarrow L_{1º\text{ trimestre}} = 5{,}54$ bilhões.

Resposta: d

QUESTÃO 29

Na mesma notícia lê-se este outro trecho:
"… A produção nacional teve uma queda de 1% com relação aos primeiros 6 meses de 2002. A produção internacional da empresa, porém, cresceu 697% — resultado da aquisição da argentina Perez Companc — e compensou o resultado neste item, que teve crescimento global de 13%."
Com base neste trecho, podemos avaliar que a relação entre a produção nacional e a produção internacional da Petrobrás no primeiro semestre de 2002 foi de, aproximadamente:

a) 54; b) 49; c) 41; d) 35; e) 30.

Resolução:

$PN_{1º\ semestre\_2003} = 0{,}99PN_{1º\ semestre\ 2002}$.
$PI_{1º\ semestre\_2003} = 7{,}97PI_{1º\ semestre\ 2002}$.
$PN_{1º\ semestre\_2003} + PI_{1º\ semestre\_2003} = 1{,}13(PN_{1º\ semestre\ 2002} + PI_{1º\ semestre\ 2002}).\Rightarrow$
$0{,}99PN_{1º\ semestre\ 2002}.+7{,}97PI_{1º\ semestre\ 2002}.= 1{,}13(PN_{1º\ semestre\ 2002} + PI_{1º\ semestres\ 2002})$.
$0{,}14\ PN_{1º\ semestre\ 2002}.= 6{,}84\ PI_{1º\ semestre\ 2002}. \Rightarrow \frac{PN_{1º\ semestre\ 2002}}{PI_{1º\ semestre\ 2002}} = \frac{6{,}84}{0{,}14} = 48{,}8571...$

Resposta: b

QUESTÃO 30

O resto da divisão do polinômio $\begin{vmatrix} x^2 & x & 1 \\ 1 & x & x \\ x & 1 & x \end{vmatrix}$ pelo polinômio $\begin{vmatrix} x & 1 \\ x & x \end{vmatrix}$ é:

a) $\begin{vmatrix} x & 1 \\ x & x \end{vmatrix}$; b) $\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ x & 1 \end{vmatrix}$; c) $1\begin{vmatrix} x & 1 \\ x & x \end{vmatrix}$; d) $\begin{vmatrix} x & x \\ x & 1 \end{vmatrix}$; e) $\begin{vmatrix} x & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}$.

Resolução:

Desenvolvendo os determinantes da questão:

$\begin{vmatrix} x^2 & x & 1 \\ 1 & x & x \\ x & 1 & x \end{vmatrix} = x^4+1+x^3-x^2-x^3-x^2 = x^4 -2x^2 +1.$

$\begin{vmatrix} x & 1 \\ x & x \end{vmatrix} = x^2 - x$

Aplicando o método da chave na divisão: $(x^4 -2x^2 +1):(x^2 - x)$

$$\begin{array}{l|l} x^4 + 0x^3 - 2x^2 + 0x + 1 & x^2 - x \\ \hline \underline{-x^4 + x^3} & x^2 + x - 1 \\ \quad + x^3 - 2x^2 + 0x + 1 & \\ \quad \underline{- x^3 + x^2} & \\ - \qquad x^2 + 0x + 1 & \\ \underline{+ \ x^2 - x} & \\ \qquad - x + 1 & \end{array}$$

O resto da divisão é -x +1 que é o resultado do desenvolvimento do determinante $\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ x & 1 \end{vmatrix}$.

Resposta: b

QUESTÂO 31

Se $a \in \{0, 1, 2, 3\}$, o grau do polinômio
$P(x) = (a^3 - 3a^2 + 2a)x^3 + (a^2 - a)x^2 + ax + 1$ é:

a) a; b) 3; c) 3 – a; d) 1; e) 0.

Resolução:

$P(x) = (a^3 - 3a^2 + 2a)x^3 + (a^2 - a)x^2 + ax + 1 \Rightarrow$

$P(x) = a(a-2)(a-1)x^3 + a(a-1)x^2 + ax+1$

Determinando P(a): $\begin{cases} a = 0 \Rightarrow P(x) = 1 \Rightarrow P(x) \text{ é de grau } 0. \\ a = 1 \Rightarrow P(x) = x + 1 \Rightarrow P(x) \text{ é de grau } 1. \\ a = 2 \Rightarrow P(x) = 2x^2 + 2x + 1 \Rightarrow P(x) \text{ é de grau } 2. \\ a = 3 \Rightarrow P(x) = 6x^3 + 6x^2 + 3x + 1 \Rightarrow P(x) \text{ é de grau } 3. \end{cases}$ $\Rightarrow$ O grau de P(x) é a.

Resposta: a

QUESTÂO 32

Usando-se apenas os algarismos 1, 2, 3 e 4, podemos formar y números naturais diferentes e menores que 1000, sendo que x deles são de 3 algarismos distintos. A razão x/y é:

a) 3/8; b) 2/7; c) 1/6; d) 5/8; e) 3/7.

Resolução:

$$y = AR_{4,1} + AR_{4,2} + AR_{4,3}$$
$$y = 4 + 4 \times 4 + 4 \times 4 \times 4 = 4 + 16 + 64 = 84 \Rightarrow \frac{x}{y} = \frac{24}{84} = \frac{2}{7}$$
$$x = A_{4,3} = 4 \times 3 \times 2 = 24$$

Resposta: b

QUESTÂO 33.

Um técnico de futebol estimou que a chance do seu time vencer o jogo do próximo fim de semana é de 60% se não chover e de 40% se chover durante o jogo. O serviço de meteorologia previu que a probabilidade de chuva no período em que ocorrerá o jogo é de 80%. Levando em consideração apenas esses dados, a probabilidade do time vencer o jogo é:

a) 48%; b) 46%; c) 44%; d) 42%; e) 40%.

Resolução:

Chover e vencer: $0{,}8 \times 0{,}4 = 0{,}32$.
Não chover e vencer: $0{,}2 \times 0{,}6 = 0{,}12$.
Probabilidade pedida: $0{,}32 + 0{,}12 = 0{,}44$.

.Resposta: c

QUESTÃO 34

As medidas dos lados de um triângulo são expressas por x, 2x e $x^2 + 2$. Sendo P o perímetro desse triângulo, podemos afirmar que:
a) $P < 6$; b) $P > 8$; c) $4 < P < 8$; d) $8 < P < 14$; e) $6 < P < 12$;.

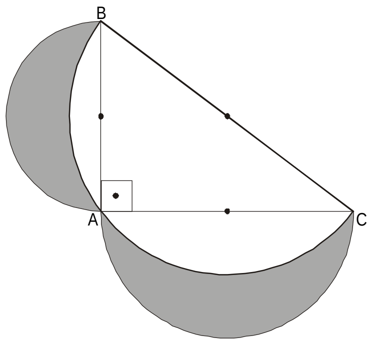
Resolução:

I.Os números positivos <u>a</u>, <u>b</u> e <u>c</u> podem ser medidas dos lados de um triângulo se $|a - b| < c < a+b \Rightarrow |x| < x^2+2 < 3x \Rightarrow \begin{cases} 0 < x < x^2 + 2 \\ x^2 + 2 < 3x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x^2 - x + 2 > 0 \Rightarrow x > 0 \\ x^2 - 3x + 2 < 0 \Rightarrow 1 < x < 2 \end{cases} \Rightarrow$ **$1 < x < 2$**.
II. $P(x) = x + 2x + x^2 + 2 = x^2 + 3x + 2$
$P(1) = 6$ e $P(2) = 12 \Rightarrow 6 < P < 12$

Resposta: e

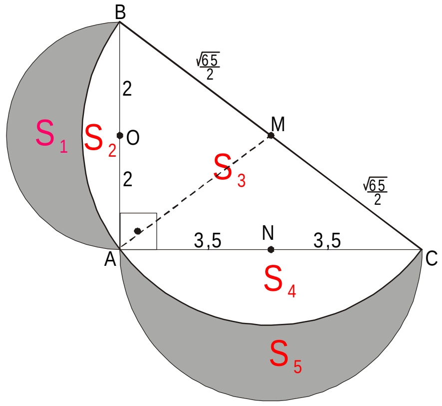
QUESTÃO 35

As semicircunferências abaixo têm centros nos pontos médios dos lados do triângulo retângulo ABC, cujos catetos AB e AC medem 4cm e 7cm, respectivamente. A área da região sombreada mede:



a) $28cm^2$; b) $14cm^2$; c) $14\pi cm^2$; d) $28\pi cm^2$; e) $32\pi cm^2$.

Resolução:



No triângulo retângulo ABC, BC = $\sqrt{14+49} = \sqrt{65}$.

A área pedida é:

$$S_1+S_2 = \frac{\pi \times 2^2}{2} + \frac{\pi \times (3,5)^2}{2} - (S_2 + S_4) = \frac{16,25\pi}{2} - (S_2 + S_4)$$

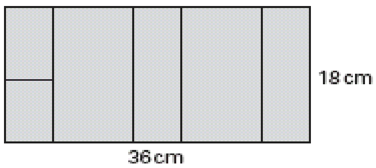
$$S_2+S_4 = \frac{\left(\frac{\sqrt{65}}{2}\right)^2 \pi}{2} - S_3 = \frac{65\pi}{8} - \frac{4 \times 7}{2} = \frac{65\pi - 112}{8}$$

$$S_1+S_2 = \frac{16,25\pi}{2} - \frac{65\pi - 112}{8} = \frac{65\pi - 65\pi + 112}{8} = 14$$

Resposta: b

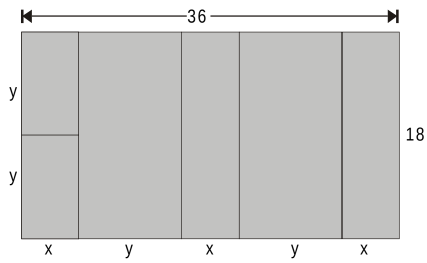
QUESTÃO 36

De uma cartolina retangular medindo 18cm por 36cm, recortamos todas as faces para a construção de um paralelepípedo reto-retângulo, como mostra a figura abaixo. O volume desse paralelepípedo é:



a) $576cm^3$; b) $648cm^3$; c) $728cm^3$; d) $972cm^3$; e) $1080cm^3$.

Resolução:



Analisando a figura ao lado vemos que as dimensões da base do paralelepípedo são x e y; e que a sua altura é 2y.

Temos então: $\begin{cases} 2y = 18 \Rightarrow y = 9 \\ 3x + 2y = 36 \Rightarrow 3x + 18 = 36 \Rightarrow x = 6 \end{cases}$

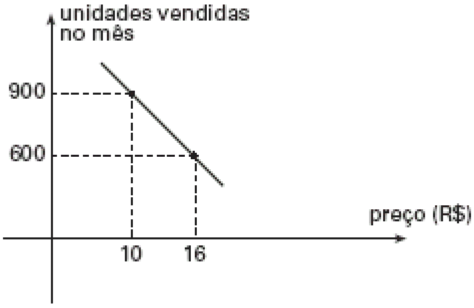
O volume do paralelepípedo è:

$V = xyh = 6.9.18 = 972cm^3$

Resposta: d

QUESTÃO 37

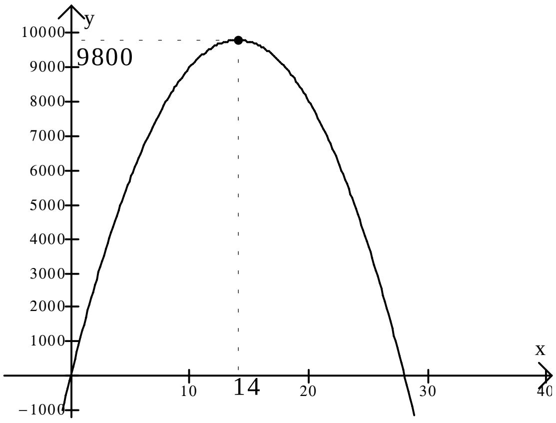
O gráfico abaixo mostra como variam as vendas de um certo produto conforme o preço cobrado por unidade.
Com base somente nesses dados, podemos determinar o preço que fornece a máxima receita. Esse preço é:



a) R$8,00; b) R$10,00; c) R$12,00; d) R$14,00; e) R$16,00.

Resolução:

O gráfico da função apresentado na questão está determinado pelos pontos: (10,900) e (16,600).
$u = a(p-10) + 900 \Rightarrow 600 = a(6) + 900 \Rightarrow 6a = -300 \Rightarrow a = -50$.
$u = -50p + 1400$
$R = up \Rightarrow R = (-50p + 1400)p \Rightarrow$
$R = -50p^2 + 1400p$
A receita atinge o seu valor máximo para $p = \frac{-1400}{-100} = 14$.



Resposta: d

QUESTÃO 38

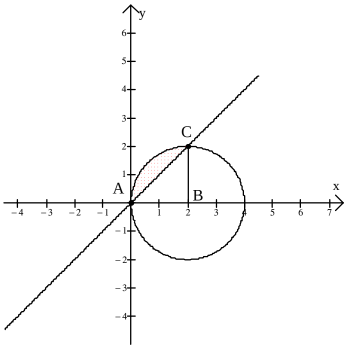
A área da região do plano cartesiano definida pelo sistema de inequações abaixo é:

$$\begin{cases} (x-2)^2 + y^2 \le 4 \\ y \ge x \end{cases}$$

a) $3\pi + 2$; b) 2π; c) $2\pi - 1$; d) π; e) $\pi - 2$.

Resolução:

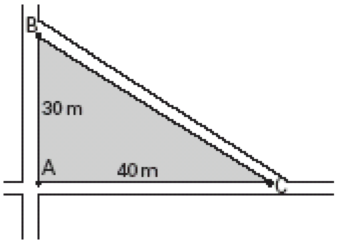
A região $(x-2)^2+y^2 \le 4$ é circular de centro (2,0) e raio 2.
A região $y \ge x$ é determinada pela primeira bissetriz.
A interseção das duas regiões está pintada de vermelho e representa a região definida por $\begin{cases} (x-2)^2 + y^2 \le 4 \\ y \ge x \end{cases}$.
Sua área é a diferença entre a área de um quadrante e a do triângulo ABC: $\frac{\pi(2)^2}{4} - \frac{2 \times 2}{2} = \pi - 2$.



Resposta: e

QUESTÃO 39

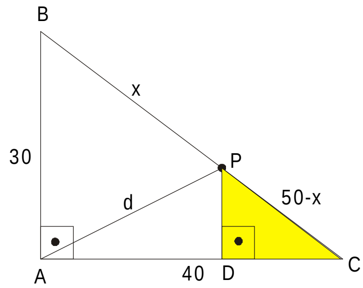
A figura abaixo representa uma praça de forma triangular, sendo que o ângulo Â é reto. Duas pessoas percorrem o contorno da praça a partir do ponto A, mas em sentidos contrários, até se encontrarem num ponto P do lado BC. Sabendo-se que elas percorreram distâncias iguais, podemos concluir que a distância do ponto P ao ponto A, em linha reta é de, aproximadamente:
(adote $\sqrt{5} \cong 2{,}25$)



a) 22m; b) 25m; c) 27m; d) 30m; e) 32m.

Resolução:

No triângulo ABC, BC = $\sqrt{900+1600} = 50$ AB+BP = PC+CA $\Rightarrow$
30+x=40+50-x $\Rightarrow$
2x = 90 – 30 $\Rightarrow$ x = 30 $\Rightarrow$ PC = 20.
Os triângulos PDC e ABC são semelhantes:
$\frac{PC}{BC} = \frac{2}{5} \Rightarrow \frac{PD}{AB} = \frac{PD}{30} = \frac{2}{5} \Rightarrow PD = 12$ e $\frac{DC}{40} = \frac{2}{5} \Rightarrow DC = 16$



No Triângulo ADP temos: AP = $\sqrt{PD^2 + AD^2} = \sqrt{144+576} = 12\sqrt{5}$ =12×2,25 = 27

Resposta: c

QUESTÃO 40

Considere todos os pares ordenados (x, y) do produto cartesiano A × B em que
A = {1, 2, 3, 4} e B = {1, 3, 5}. Tomando-se todos os 12 produtos x **.** y, podemos afirmar que a média, a moda e a mediana desse conjunto são, respectivamente:

a) 9,5; 7,5; 5,5;
b) 7,5; 5,5; 3,0;
c) 7,5; 3,0; 5,5;
d) 5,5; 5,5; 5,5;
e) 7,5; 3,0; 6,0.

Resolução:

A×B = {(1,1), (1,3), (1,5), (2,1), (2,3), (2,5), (3,1) (3,3), (3,5), (4,1), (4,3), (4,5)}
Todos os possíveis valores de xy são: 1, 3, 5. 2, 6, 10, 3, 9, 15, 4, 12 e 20.
Colocados em ordem crescente: 1, 2, 3, 3, 4, 5, 6, 9, 10, 12, 15, 20.
A média desses valores é : $\frac{1+2+3+3+4+5+6+9+10+12+15+20}{12} = \frac{90}{12} = 7{,}5$.

A moda é o valor que mais se repete no conjunto: 3,0.

Como o conjunto tem 12 elementos não existe um elemento mediano pois a sua posição seria $\frac{12+1}{2} = 6{,}5$.

1, 2, 3, 3, 4, 5, 6, 9, 10, 12, 15, 20

6° 7°

Sendo $6<6{,}5<7$, então a mediana será : $\frac{5+6}{2} = 5{,}5$

Resposta: c