PROVA DE MATEMÁTICA DA FUVEST VESTIBULAR– 2012 – 1ª Fase RESOLUÇÃO: Profa. Maria Antônia Gouveia.

QUESTÃO 58.

Em uma festa com n pessoas, em um dado instante, 31 mulheres se retiraram e restaram convidados na razão de 2 homens para cada mulher.
Um pouco mais tarde, 55 homens se retiraram e restaram, a seguir, convidados na razão de 3 mulheres para cada homem. O número de pessoas presentes inicialmente na festa era igual a
a) 100 b) 105 c) 115 d) 130 e)135

RESOLUÇÃO :

Representando o número de mulheres por x e o número de homens por y.

$$\begin{cases} \dfrac{y}{x-31}=\dfrac{2}{1} \\ \dfrac{y-55}{x-31}=\dfrac{1}{3} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2x-62=y \\ x-31=3y-165 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2x-y=62 \\ x-3y=-134 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 6x-3y=186 \\ -x+3y=134 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 5x=320 \Rightarrow x=64 \\ y=2x-62 \Rightarrow y=66 \end{cases}$$

x + y = 64 + 66 = 130.

RESPOSTA: Alternativa d.

QUESTÃO 59.

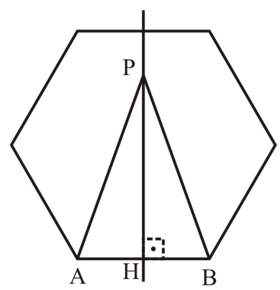
O segmento $\overline{AB}$ é lado de um hexágono regular de área $\sqrt{3}$. O ponto P pertence à mediatriz de $\overline{AB}$ de tal modo que a área do triângulo PAB vale $\sqrt{2}$. Então, a distância de P ao segmento $\overline{AB}$ é igual a
a) $\sqrt{2}$ b) $2\sqrt{2}$ c) $3\sqrt{2}$ d) $\sqrt{3}$ e) $2\sqrt{3}$

RESOLUÇÃO:

Sendo $\sqrt{3}$ a área do hexágono regular, representado ao lado,

$$6\left(\frac{AB^2\sqrt{3}}{4}\right)=\sqrt{3} \Rightarrow 3AB^2=2 \Rightarrow AB=\sqrt{\frac{2}{3}}=\frac{\sqrt{6}}{3}.$$

O triângulo PAB é isósceles pois, P pertencendo à mediatriz de $\overline{AB}$ é equidistante dos extremos deste segmento .



Como $S_{PAB}=\sqrt{2} \Rightarrow \dfrac{AB\times PH}{2}=\sqrt{2} \Rightarrow \dfrac{\sqrt{6}}{3}\times PH=2\sqrt{2} \Rightarrow PH=\dfrac{6\sqrt{2}}{\sqrt{6}}=\dfrac{6\sqrt{12}}{6}=2\sqrt{3}$

RESPOSTA: Alternativa e.

QUESTÃO 60.

O número real x, com $0 < x < \pi$, satisfaz a equação $\log_3(1-\cos x)+\log_3(1+\cos x)=-2$.
Então, $\cos 2x + \text{sen}\,x$ vale

a) $\frac{1}{3}$ b) $\frac{2}{3}$ c) $\frac{7}{9}$ d) $\frac{8}{9}$ e) $\frac{10}{9}$

RESOLUÇÃO:

$\log_3(1-\cos x)+\log_3(1+\cos x)=-2 \Rightarrow \log_3[(1-\cos x)(1+\cos x)]=-2 \Rightarrow$

$\log_3(1-\cos^2 x)=-2 \Rightarrow \log_3(\text{sen}^2 x)=-2 \Rightarrow 2\log_3(\text{sen}\,x)=-2 \Rightarrow \log_3(\text{sen}\,x)=-1 \Rightarrow$

$senx=\frac{1}{3} \Rightarrow sen^2x=\frac{1}{9} \Rightarrow 1-\cos^2 x=\frac{1}{9} \Rightarrow \cos^2 x=\frac{8}{9}$.

Então: $\cos 2x+\text{sen}\,x=\cos^2 x-\text{sen}^2 x+\text{sen}\,x=\frac{8}{9}-\frac{1}{9}+\frac{1}{3}=\frac{7}{9}+\frac{3}{9}=\frac{10}{9}$.

RESPOSTA: Alternativa e.

QUESTÃO 61.

Considere a função $f(x)=1-\frac{4x}{(x+1)^2}$, a qual está definida para $x \neq -1$. Então para todo $x \neq 1$ e $x \neq -1$, o produto $f(x)f(-x)$ é igual a

a) -1 b) 1 c) x + 1 d) $x^2 + 1$ e) $(x - 1)^2$

RESOLUÇÃO:

$$\left(1-\frac{4x}{(x+1)^2}\right)\left(1+\frac{4x}{(-x+1)^2}\right)=\left(\frac{x^2-2x+1}{(x+1)^2}\right)\left(\frac{x^2+2x+1}{(1-x)^2}\right)=1.$$

RESPOSTA: Alternativa b.

QUESTÃO 62.

Em um plano, é dado um polígono convexo de seis lados, cujas medias dos ângulos internos, dispostas em ordem crescente, formam uma progressão aritmética. A medida do maior ângulo é igual a 11 vezes a medida do menor. A soma das medidas dos quatro menores ângulos internos desse polígono, em graus, é igual a

a) 315 b) 320 c) 325 d) 330 e) 335

RESOLUÇÃO:

A soma dos ângulos internos de um hexágono é (6 – 2)× 180° = 720°.
Como os seis ângulos estão em P.A.,

$\frac{(x+11x)\times 6}{2}=720° \Rightarrow 72x=1440° \Rightarrow x=20° \Rightarrow a_1=20°$ e $a_6=220°$

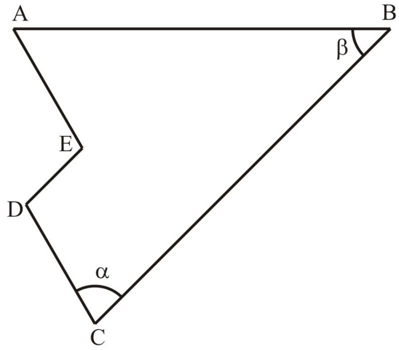
$a_6=a_1+5r \Rightarrow 20°+5r=220° \Rightarrow 5r=200° \Rightarrow r=40°$

Os quatro menores ângulos são portanto: 20°, 60°, 100° e 140° cuja soma é 320°.

RESPOSTA: Alternativa b.

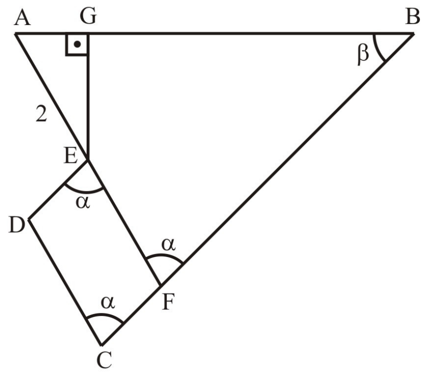
QUESTÃO 63.

Na figura, tem-se $\overline{AE}$ paralelo a $\overline{CD}$, $\overline{BC}$ paralelo a $\overline{DE}$, AE = 2, $\alpha = 45°$ e $\beta = 75°$. Nessas condições, a distância do ponto E ao segmento $\overline{AB}$ é igual a



a) $\sqrt{3}$
b) $\sqrt{2}$
c) $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$
d) $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$
e) $\dfrac{\sqrt{2}}{4}$

RESOLUÇÃO:



Prolongando-se o segmento $\overline{AE}$ até o ponto F, determina-se o paralelogramo CDEF,

Os ângulos $D\hat{C}F$ e $A\hat{F}B$ são congruentes (correspondentes formados por duas paralelas e uma transversal).
No triângulo AFC: $\hat{A} = 180° - (45° + 75°) = 60°$.
A medida GE representa a distância do ponto E ao segmento $\overline{AB}$.
No triângulo retângulo AGE:

$$\frac{GE}{AE} = \text{sen}60° \Rightarrow \frac{GE}{2} = \frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow GE = \sqrt{3}$$

RESPOSTA: Alternativa a.

QUESTÃO 64.

Considere a matriz $A = \begin{bmatrix} a & 2a+1 \\ a-1 & a+1 \end{bmatrix}$ em que a é um número real. Sabendo que A admite inversa A^{-1} cuja primeira coluna é $\begin{bmatrix} 2a-1 \\ -1 \end{bmatrix}$, a soma dos elementos da diagonal principal de A^{-1} é igual a

a) 5 b) 6 c) 7 d) 8 e) 9

RESOLUÇÃO:

$$\begin{bmatrix} a & 2a+1 \\ a-1 & a+1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2a-1 & x \\ -1 & y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} a(2a-1) - 1(2a+1) = 1 \\ (a-1)(2a-1) - 1(a+1) = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2a^2 - 3a - 2 = 0 \\ 2a^2 - 4a = 0 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\left.\begin{cases} 1^a \text{ equação} \to a = \dfrac{3 \pm \sqrt{9+16}}{4} = \dfrac{3 \pm 5}{4} \Rightarrow a = 2 \text{ ou } a = -\dfrac{1}{2} \\ 2^a \text{ equação} \to A(2a-4) = 0 \Rightarrow a = 2 \text{ ou } a = 0 \end{cases}\right\} \Rightarrow a = 2 \text{ (valor que satisfaz às duas}$$

equações) $\Rightarrow A = \begin{bmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} \Rightarrow A^{-1} = \begin{bmatrix} 3 & -5 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} \Rightarrow$ A soma dos elementos da diagonal principal de A^{-1} é 5.

RESPOSTA: Alternativa a.

QUESTÃO 65

No plano cartesiano Oxy, a circunferência C é tangente ao eixo Ox no ponto de abscissa 5 e contém o ponto (1, 2). Nessas condições, o raio C vale

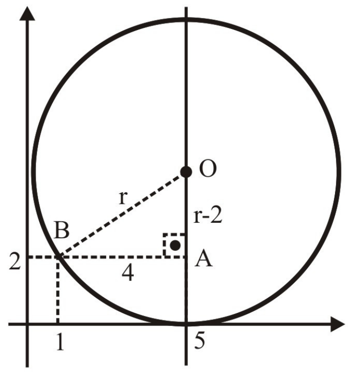
a) $\sqrt{5}$ b) $2\sqrt{5}$ c) 5 d) $3\sqrt{5}$ e) 10

RESOLUÇÃO:

A figura ao lado representa a situação-problema acima: a circunferência tangente ao eixo Ox no ponto (5, 0) e passando pelo ponto (1, 2).

Os lados do triângulo AOB medem r, r – 2 e 4, respectivamente.

Logo: $r^2 = (r-2)^2 + 16 \Rightarrow 4r = 20 \Leftarrow r = 5$.



RESPOSTA: Alternativa c.

QUESTÃO 66

Considere todos os pares ordenados de números naturais (a, b), em que $11 \leq a \leq 22$ e $43 \leq b \leq 51$. Cada um desses pares ordenados está escrito em um cartão diferente. Sorteando-se um desses cartões ao acaso, qual é a probabilidade de que se obtenha um par ordenado (a, b) de tal forma que a fração a/b seja irredutível e com denominador par?

a) $\frac{7}{27}$ b) $\frac{13}{54}$ c) $\frac{6}{27}$ d) $\frac{11}{54}$ e) $\frac{5}{27}$

RESOLUÇÃO:

Seja o conjunto A = {11, 12, 13, 14, 15, 16, 17, 18, 19, 20, 21, 22} e o conjunto B = {43, 44, 45, 46, 47, 48, 49, 50, 51}.

Existem $12 \times 9 = 108$ pares ordenados do tipo (a, b), tal que $a \in A$ e $b \in B$.

A fração $\frac{a}{b}$ deve ser irredutível e com denominador par, logo a somente pode assumir valores ímpares do conjunto C = {11, 13, 15, 17, 19, 21},subconjunto de A, e b valores pares pertencentes ao conjunto D ={44, 46, 48, 50}, subconjunto de B.

O conjunto $C \times D$ tem $6 \times 4 = 24$ pares ordenados, entre os quais os pares (11, 44), (15, 48), (15, 50) e (21, 48) que não determinam frações irredutíveis.

A probabilidade pedida é: $\frac{24-4}{108} = \frac{20}{108} = \frac{5}{27}$

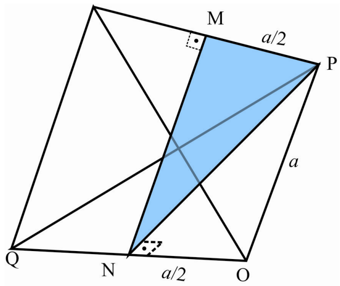
RESPOSTA: Alternativa e.

QUESTÃO 67

Em um tetraedro regular de lado a, a distância entre os pontos médios de duas arestas não adjacentes é igual a

a) $a\sqrt{3}$ b) $a\sqrt{2}$ c) $\frac{a\sqrt{3}}{2}$ d) $\frac{a\sqrt{2}}{2}$ e) $\frac{a\sqrt{2}}{4}$

RESOLUÇÃO:



O segmento $\overline{PN}$ é altura do triângulo equilátero OPQ, portanto,

$$PN = \sqrt{a^2 - \frac{a^2}{4}} = \sqrt{\frac{3a^2}{4}} = \frac{a\sqrt{3}}{2}.$$

No triângulo retângulo MNP: $MN = \sqrt{\frac{3a^2}{4} - \frac{a^2}{4}} = \sqrt{\frac{2a^2}{4}} = \frac{a\sqrt{2}}{2}$.

RESPOSTA: Alternativa d.

QUESTÃO 68

Uma substância radioativa sofre desintegração ao longo do tempo, de acordo com a relação $m(t) = ca^{-kt}$, em que a é um número real positivo, t é dado em anos, m(t) é a massa da substância em gramas e c, k são constantes positivas. Sabe-se que m_0 gramas dessa substância foram reduzidos a 20% em 10 anos. A que porcentagem de m_0 ficará reduzida a massa da substância, em 20 anos?

a) 10% b) 5% c) 4% d) 3% e) 2%

RESOLUÇÃO:

$$m_0 = m(0) = c \text{ e } m(10) = ca^{-10k} \Rightarrow ca^{-10k} = 0{,}2c \Rightarrow a^{-10k} = 0{,}2 \Rightarrow \left(a^k\right)^{-10} = 0{,}2 \Rightarrow \left(a^k\right) = 0{,}2^{-\frac{1}{10}}$$

$$m(20) = ca^{-20k} = c\left(a^k\right)^{-20} = c \times \left(0{,}2^{-\frac{1}{10}}\right)^{-20} = 0{,}2^2 c = 0{,}04c \Rightarrow m(20) = 0{,}04m_0.$$

RESPOSTA: Alternativa c.

QUESTÃO 69

Francisco deve elaborar uma pesquisa sobre dois artrópodes distintos. Eles serão selecionados, ao acaso, da seguinte relação: aranha, besouro, barata, lagosta, camarão, formiga, ácaro, caranguejo, abelha, carrapato, escorpião e gafanhoto.

Qual é a probabilidade de que ambos os artrópodes escolhidos para a pesquisa de Francisco não sejam insetos?

a) $\frac{49}{144}$ b) $\frac{14}{33}$ c) $\frac{7}{22}$ d) $\frac{5}{22}$ e) $\frac{15}{144}$

RESOLUÇÃO:

Entre os artrópodes: aranha, besouro, barata, lagosta, camarão, formiga, ácaro, caranguejo, abelha, carrapato, escorpião e gafanhoto, apenas são insetos, **o besouro, a barata, a formiga, a abelha e o gafanhoto**.

A probabilidade de que ambos os artrópodes escolhidos para a pesquisa de Francisco não sejam insetos é:

$\frac{7}{12} \times \frac{6}{11} = \frac{7}{22}$.

RESPOSTA: Alternativa c.