PROVAS DE MATEMÁTICA DO VESTIBULAR-2012 DA MACKENZIE
RESOLUÇÃO: Profa. Maria Antônia Gouveia.

14/12/2011

QUESTÃO Nº 19

Turma	Nº de alunos	Média das notas obtidas
A	60	5,0
B	50	4,0
C	40	7,0
D	50	3,0

A tabela acima refere-se a uma prova aplicada a 200 alunos , distribuídos em 4 turmas A, B C e D. A média aritmética das notas dessa prova é:

a) 4,65 b) 4,25 c) 4,45 d) 4,55 e) 4,35

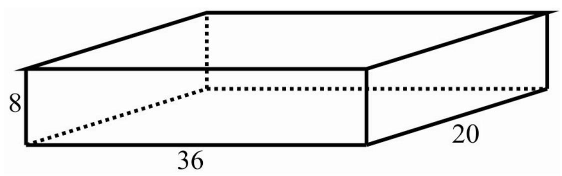
RESOLUÇÃO:

Multiplicando-se a média das notas de cada turma pelo seu total de alunos ter-se-á o total de pontos obtidos por cada uma das turmas.

$$\text{Ma} = \frac{60\times5+50\times4+40\times7+50\times3}{60+50+40+50} = \frac{300+200+280+150}{200} = \frac{930}{200} = 4{,}65\ .$$

RESPOSTA: Alternativa a.

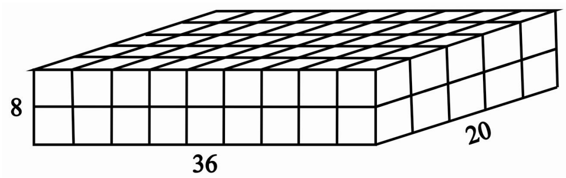
QUESTÃO Nº 20



O número mínimo de cubos de mesmo volume e dimensões inteiras, que preenchem completamente o paralelepípedo retângulo da figura, é:

a) 64 b) 90 c) 48 d) 125 e) 100

RESOLUÇÃO:



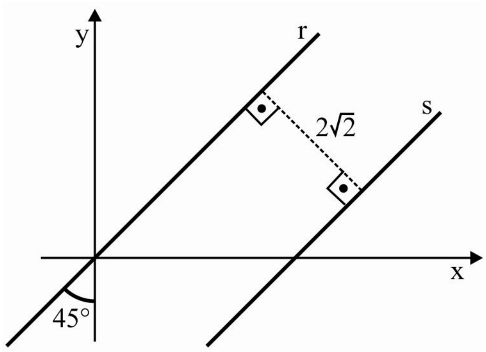
Para que o paralelepípedo retângulo da figura seja preenchido completamente com um número mínimo de cubos, de mesmo volume e dimensões inteiras, essas dimensões devem ser a maior possível e que é exatamente o maior divisor comum entre as dimensões do paralelepípedo.

Sendo $8 = 2^3$, $36 = 2^2 \times 3^2$ e $20 = 2^2 \times 5$, então o mdc(8, 36, 20) = 4, então o número mínimo de cubos será: $\dfrac{8 \times 36 \times 20}{4 \times 4 \times 4} = 2 \times 9 \times 5 = 90$.

RESPOSTA: Alternativa b.

QUESTÃO Nº 21

Na figura as retas r e s são paralelas. Se (x, y) é um ponto de s, então x – y vale:



a) 2 b) $\sqrt{2}$ c) 4

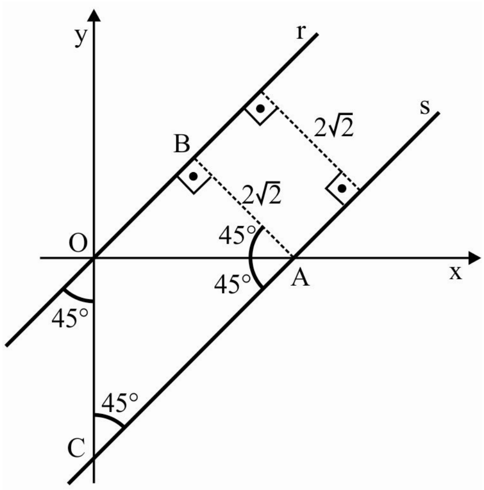
d) $2\sqrt{2}$ e) $4\sqrt{2}$

RESOLUÇÃO:

Na figura ao lado, o triângulo ABO é retângulo e isósceles (ângulos agudos medindo 45°), logo $OA^2 = 2 \times (2\sqrt{2})^2 \Rightarrow OA^2 = 16 \Rightarrow OA = 4$.

No triângulo AOC, AO = OC = 4, logo a reta s intercepta o eixo Oy no ponto (0, – 4)

Então a equação da reta s, que forma um ângulo de 45° com o eixo Ox é: $y = tg45°x - 4 \Rightarrow y = x - 4$ e os pontos (x, y) a ela pertencentes são sempre do tipo $(x, x-4)$ e a diferença x – y = x – (x – 4) = 4.



RESPOSTA: Alternativa c.

QUESTÃO Nº 22

O maior valor que o número real $\dfrac{10}{2-\dfrac{\text{senx}}{3}}$ pode assumir é

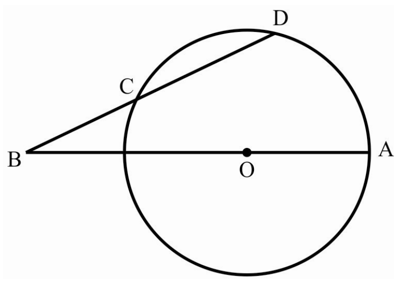
a) $\dfrac{20}{3}$ b) $\dfrac{7}{3}$ c) 10 d) 6 e) $\dfrac{20}{7}$

RESOLUÇÃO:

$$\frac{10}{2-\dfrac{\text{senx}}{3}}=\begin{cases}\text{para senx}=-1, \dfrac{10}{2-\dfrac{\text{senx}}{3}}=\dfrac{10}{2-\dfrac{-1}{3}}=10\times\dfrac{3}{7}=\dfrac{30}{7}\\ \text{para senx}=0, \dfrac{10}{2-\dfrac{\text{senx}}{3}}=\dfrac{10}{2}=5\\ \text{para senx}=1, \dfrac{10}{2-\dfrac{\text{senx}}{3}}=\dfrac{10}{2-\dfrac{1}{3}}=10\times\dfrac{3}{5}=\dfrac{30}{5}=6\end{cases}$$

RESPOSTA: Alternativa d

QUESTÃO Nº 23

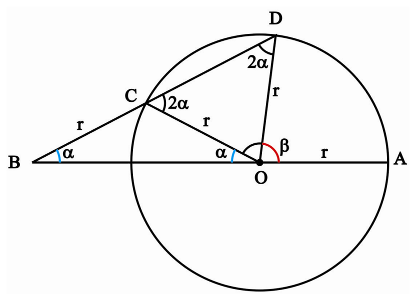


Na figura, se a circunferência tem centro O e BC = AO, então a razão entre as medidas dos ângulos AÔD e CÔB é

a) $\dfrac{5}{2}$ b) $\dfrac{3}{2}$ c) 2

d) $\dfrac{4}{3}$ e) 3

RESOLUÇÃO:



A figura ao lado, foi construída utilizando as informações e a figura da questão.

BCO é um triângulo eqüilátero, então $C\hat{B}O = C\hat{O}B = \alpha$.

O ângulo $D\hat{C}O$ é externo ao triângulo BCO e não é adjacente â nenhum dos dois acima, logo a sua medida é $\alpha+\alpha=2\alpha$.

O triângulo COD também é isósceles, logo o ângulo $O\hat{D}C$ mede 2α

O ângulo AÔD é externo ao triângulo DBO, logo. $\beta = 2\alpha+\alpha = 3\alpha$

A razão entre as medidas dos ângulos AÔD e CÔB é: $\dfrac{3\alpha}{\alpha}=3$.

RESPOSTA: Alternativa e.

razão entre as medidas dos ângulos AÔD e CÔB

QUESTÃO Nº 24

Tendo-se 5 objetos diferentes e 7 caixas numeradas de 1 a 7, o número de formas diferentes de se guardar um objeto em cada caixa é

a) 2.520 b) 7^5 c) 5^7 d) 1.260 e) 840

RESOLUÇÃO:

Considerando-se os dados da questão, o número de formas diferentes de se guardar um objeto em cada caixa é $A_{7,5} = 7 \times 6 \times 5 \times 4 \times 3 = 2520$.

RESPOSTA: Alternativa e.

QUESTÃO Nº 25

Se log16 = a, então $\log\sqrt[3]{40}$ vale:

a) $\frac{a+6}{12}$ b) $\frac{a+2}{6}$ c) $\frac{a+6}{3}$ d) $\frac{a+12}{2}$ e) $\frac{a+2}{3}$

RESOLUÇÃO:

$\log 16 = a \Rightarrow \log 2^4 = a \Rightarrow 4\log 2 = a \Rightarrow \log 2 = \frac{a}{4}$.

$$\log\sqrt[3]{40} = \log(40)^{\frac{1}{3}} = \frac{1}{3}\log(4\times 10) = \frac{1}{3}(\log 2^2 + \log 10) = \frac{1}{3}\left(2\times\frac{a}{4}+1\right) = \frac{1}{3}\left(\frac{a+2}{2}\right) = \frac{a+2}{6}$$

RESPOSTA: Alternativa b.

15/12/2011

QUESTÃO Nº 19

A soma dos números naturais positivos, que divididos por 37 dão resto igual ao cubo do quociente, é
a) 258 b) 290 c) 301 d) 320 e) 348

RESOLUÇÃO:

Os números naturais positivos, que divididos por 37 dão resto igual ao cubo do quociente podem ser representados, a partir da relação “Numa divisão, o dividendo é igual ao produto do divisor pelo quociente, adicionado ao resto”, como $N = 37x + x^3$, com $x^3 < 37$.
Se $x^3 < 37$, então $x \in \{1, 2, 3\}$. Logo os valores de N são: 37 + 1, 74 + 8 e 111 + 27, ou seja, 38, 82 e 138.
A soma dos três valores de N é 258.

RESPOSTA: Alternativa a.

QUESTÃO Nº 20

As medidas dos lados de um triângulo retângulo estão em progressão aritmética. Se a área do triângulo é $\frac{1}{6}$, o seu perímetro é

a) 12 b) $\frac{5}{6}$ c) 4 d) 2 e) $\frac{7}{6}$

RESOLUÇÃO:

Sejam x – r, x e x + r os lados do triângulo retângulo.
Aplicando o Teorema de Pitágoras ao triângulo:

$$(x+r)^2 = (x-r)^2 + x^2 \Rightarrow x^2 + 2xr + r^2 = x^2 - 2xr + r^2 + x^2 \Rightarrow 4xr = x^2 \Rightarrow xr = \frac{x^2}{4} \Rightarrow$$

Como a sua área é $\frac{1}{6}$, $\frac{x(x-r)}{2} = \frac{1}{6} \Rightarrow x^2 - xr = \frac{1}{3} \Rightarrow xr = x^2 - \frac{1}{3} \Rightarrow \frac{x^2}{4} = \frac{3x^2-1}{3} \Rightarrow 3x^2 = 12x^2 - 4 \Rightarrow$

$$9x^2 - 4 = 0 \Rightarrow x = \frac{2}{3}.$$

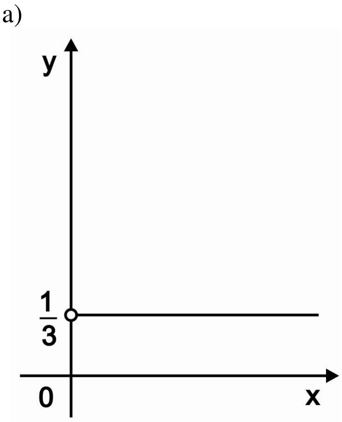
O perímetro do triângulo é: x – r + x + x + r = 3x = $3\left(\frac{2}{3}\right) = 2$.

RESPOSTA: Alternativa d

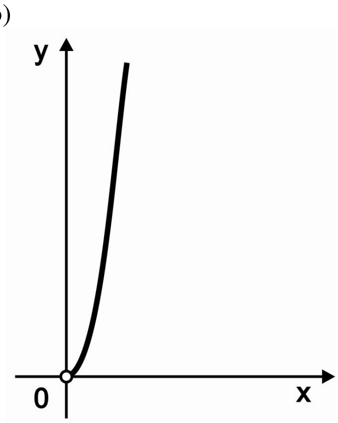
QUESTÃO Nº 21

Dentre as alternativas abaixo, o melhor esboço gráfico da função real definida por $f(x) = \frac{\sqrt{x}\sqrt{x^2}}{3x}$ é

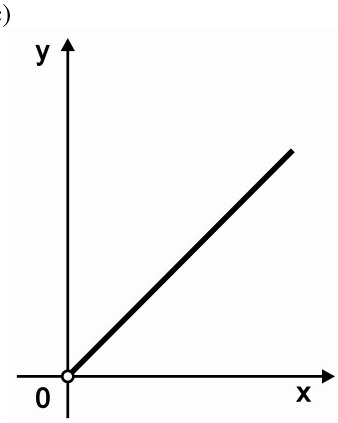
a)



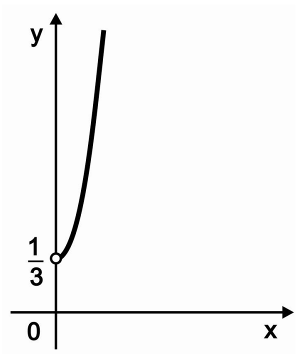
b)



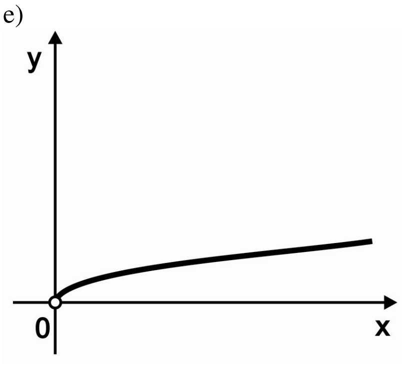
c)



d)



e)



RESOLUÇÃO:

O domínio de $f(x) = \dfrac{\sqrt{x}\sqrt{x^2}}{3x}$ é x > 0.

Para todo x > 0, tem-se então $f(x) = \dfrac{\sqrt{x}\sqrt{x^2}}{3x} = \dfrac{x\sqrt{x}}{3x} = \dfrac{\sqrt{x}}{3} = \dfrac{1}{3}x^{\frac{1}{2}}$ cujos pontos estão todos no primeiro quadrante.

RESPOSTA: Alternativa e.

QUESTÃO Nº 22

Considere as raízes positivas a e b da equação $x^3 - 7x + 6 = 0$, com a < b e seja a circunferência de centro P(a, b). Se essa circunferência é tangente externamente à curva $x^2 + y^2 - 10x + 2y + 17 = 0$, o raio da circunferência de centro P é

a) 1 b) $\sqrt{2}$ c) $\sqrt{3}$ d) 2 e) $2\sqrt{3}$

RESOLUÇÃO:

Como a soma dos coeficientes da equação $x^3 - 7x + 6 = 0$ é igual a zero é porque 1 é uma de suas raízes e o polinômio $x^3 - 7x + 6$ é divisível pelo binômio x – 1.
Dividindo o polinômio $x^3 - 7x + 6$ pelo binômio (x – 1) pela regra de Ruffini:

	1	0	–7	6
1	1	1	–6	0
–3	1	–2	0	
2	1	0		

As raízes da equação $x^3 - 7x + 6 = 0$ são -3, 1 e 2, logo a =1 e b = 2 ⇒ P(a, b) = (1, 2).

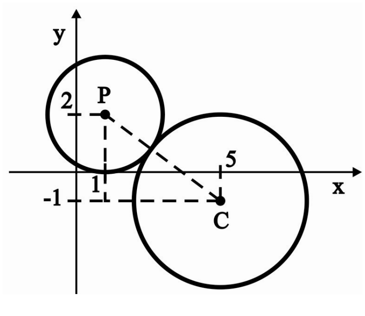
$x^2 + y^2 - 10x + 2y + 17 = 0 \Rightarrow (x-5)^2 + (y+1)^2 - 25 - 1 + 17 = 0 \Rightarrow (x-5)^2 + (y+1)^2 = 9 \Rightarrow$

o centro da circunferência $x^2 + y^2 - 10x + 2y + 17 = 0$ é C =(5, – 1) e seu raio mede 3.

Como essa circunferência e a de centro P são tangentes externamente, então a distância entre seus centros é a soma de seus raios.

$PC = \sqrt{(5-1)^2 + (-1-2)^2} = \sqrt{16+9} = 5$.

A soma dos dois raios é 5 e o raio da circunferência de centro P é 5 – 3 = 2.



RESPOSTA: Alternativa d.

QUESTÃO Nº 23

Em uma pirâmide regular, o número de arestas da base, a medida da aresta da base e a altura são, nessa ordem, os três primeiros termos de uma progressão aritmética, cujo primeiro termo é igual à razão. Se o trigésimo primeiro termo dessa progressão é 93, o volume da pirâmide é

a) $18\sqrt{3}$ b) $27\sqrt{3}$ c) $8\sqrt{3}$ d) $9\sqrt{3}$ e) $12\sqrt{3}$

RESOLUÇÃO:

Representando o número de arestas da base, a medida da aresta da base e a altura, respectivamente, por r, 2r e 3r, tem-se $a_{31} = r + 30r = 93 \Rightarrow 31r = 93 \Rightarrow r = 3$.

Então o número de arestas da base é 3, a medida da aresta da base é 6 e a altura da pirâmide é 9.

Como a pirâmide é regular, o triângulo da base é eqüilátero de lado 6, então o volume da pirâmide é:

$$V = \frac{1}{3}Bh = \frac{1}{3} \times \left(\frac{6^2\sqrt{3}}{4}\right) \times 9 = \frac{108\sqrt{3}}{4} = 27\sqrt{3}.$$

RESPOSTA: Alternativa b.

QUESTÃO Nº 24

Sempre que joga, um time tem probabilidade $\frac{2}{3}$ de vencer uma partida. Em quatro jogos, a probabilidade de esse time vencer, exatamente dois deles, é

a) $\frac{4}{27}$ b) $\frac{16}{81}$ c) $\frac{8}{27}$ d) $\frac{4}{81}$ e) $\frac{16}{27}$

RESOLUÇÃO:

Se sempre que joga, o time tem probabilidade $\frac{2}{3}$ de vencer uma partida,a probabilidade de perder ou empatar a partida é $\frac{1}{3}$.

Considerando como V cada vitória e como P, cada empate ou derrota, tem-se as possibilidades:

VVPP, VPVP, VPPV, PPVV , PVPV, PVVP

Em quatro jogos, a probabilidade de esse time vencer, exatamente dois deles é $6 \times \left(\frac{2}{3}\right)^2 \times \left(\frac{1}{3}\right)^2 = \frac{8}{27}$.

RESPOSTA: Alternativa c.

QUESTÃO Nº 25

I. Se a e b são números reais positivos e diferentes de 1, tais que $\log_a b - \frac{1}{3}\log b = 0$, então o valor de a é 0,001.

II. Se $(1 - \text{sen } x, 1 - \cos x,\ 1 + \text{sen } x), 0 < x < \frac{\pi}{2}$, é uma progressão geométrica, cos 3x é igual a -1.

III. Se a representação gráfica dos pares (x, y), são soluções do sistema $\begin{cases} x - 3y = k \\ 2x - py = 8 \end{cases}$, com k e p reais, é uma reta, então k + p = 10.

Considerando as afirmações I, II e III acima, é correto afirmar que
a) somente I e II são verdadeiras.
b) somente II é verdadeira.
c) somente III é verdadeira.
d) somente II e III são verdadeiras.
e) todas são verdadeiras.

RESOLUÇÃO:

I. FALSA.

$$\log_a b - \frac{1}{3}\log b = 0 \Rightarrow \frac{\log b}{\log a} - \frac{1}{3}\log b = 0 \Rightarrow \log b\left(\frac{1}{\log a} - \frac{1}{3}\right) = 0 \Rightarrow \log b \neq 0 \text{ e } \frac{1}{\log a} - \frac{1}{3} = 0 \Rightarrow$$
$$3 - \log a = 0 \Rightarrow \log a = 3 \Rightarrow a = 10^3 = 1000.$$

II. **VERDADEIRA.**

$$(1 - \cos x)^2 = (1 - \text{sen } x)(1 + \text{sen } x) \Rightarrow \cos^2 x + 1 - 2\cos x = 1 - \text{sen}^2 x \Rightarrow \cos^2 x - 2\cos x + 1 = \cos^2 x \Rightarrow$$
$$2\cos x = 1 \Rightarrow \cos x = \frac{1}{2} \Rightarrow x = \frac{\pi}{3}, \text{ pois, } 0 < x < \frac{\pi}{2} \Rightarrow 3x = \pi \text{ e } \cos 3x = -1.$$

III. **VERDADEIRA.**

Se a representação gráfica dos pares (x, y), soluções do sistema $\begin{cases} x - 3y = k \\ 2x - py = 8 \end{cases}$, com k e p reais, é uma reta, então o sistema tem infinitas soluções usando a regra de Cramer:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & -3 \\ 2 & -p \end{vmatrix} = 0 \text{ e } \Delta_x = \begin{vmatrix} 1 & k \\ 2 & 8 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow -p + 6 = 0 \text{ e } 8 - 2k = 0 \Rightarrow p = 6 \text{ e } k = 4 \Rightarrow p + k = 10.$$

RESPOSTA: Alternativa d.