PROVAS DE MATEMÁTICA DO VESTIBULARES-2011 DA MACKENZIE
RESOLUÇÃO: Profa. Maria Antônia Gouveia.

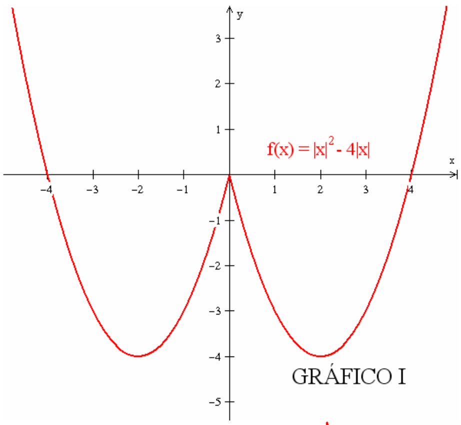
13 / 12 / 2010

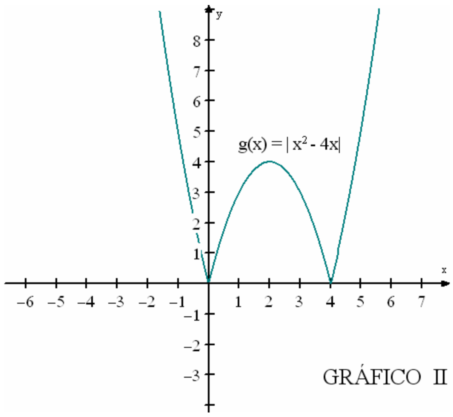
QUESTÃO Nº 19

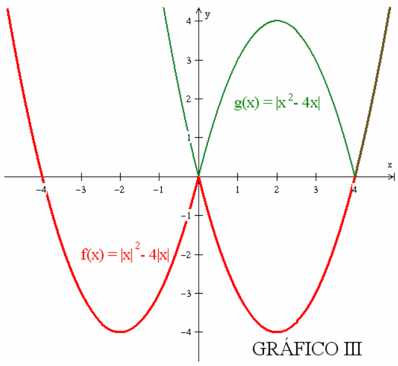
Dadas as funções reais definidas por $f(x) = |x|^2 - 4|x|$ e $g(x) = |x^2 - 4x|$, considere **I**, **II**, **III** e **IV** abaixo.
I) Ambas as funções possuem gráficos simétricos em relação ao eixo das ordenadas.
II) O número de soluções reais da equação $f(x) = g(x)$ é 3.
III) A soma de todas as raizes das funções dadas é 4.
IV) Não existe x real tal que $f(x) < g(x)$.
O número de afirmações corretas é

a) 0 b) 1 c) 2 d) 3 e) 4

RESOLUÇÃO:







I) FALSA.
Analisando os gráficos I e II, verifica-se que apenas a função f(x) possui o gráfico simétrico em relação ao eixo das ordenadas, pois para todo x real, $f(x) = f(-x)$.
II) FALSA.
Pela análise do gráfico III, verifica-se que o conjunto solução da equação $f(x) = g(x)$ é $\{0,4\} \cup \{x \in R / x > 4\}$, então a equação tem infinitas soluções.
III) VERDADEIRA.
Pelo gráfico I vê-se que as raízes de f(x) são –4, 0 e 4 e pelo gráfico II que as raízes de g(x) são 0 e 4. Logo a soma desses valores é $-4 + 0 + 4 + 0 + 4 = 4$
IV) FALSA.
Analisando o gráfico III conclui-se que $f(x) < g(x)$ para todo x pertencente ao intervalo $]-\infty, 0[\cup]0, 4[$.

RESPOSTA: Alternativa b.

QUESTÃO Nº 20

O lado, a altura e a área de um triângulo equilátero inscrito em um círculo formam, nesta ordem, uma progressão geométrica. A área do círculo é igual a

a) 2π b) $3\sqrt{3}\pi$ c) π d) 3π e) $\sqrt{3}\pi$

RESOLUÇÃO:

Num triângulo eqüilátero de lado ℓ, a altura mede $\dfrac{\ell\sqrt{3}}{2}$ e a área $\dfrac{\ell^2\sqrt{3}}{4}$. Como essas medidas estão, nessa ordem, em P.G.:

$$\ell \times \left(\frac{\ell^2\sqrt{3}}{4}\right) = \frac{\ell^2 \times \left(\sqrt{3}\right)^2}{4} \Rightarrow \frac{\ell\sqrt{3}}{4} = \frac{3}{4} \Rightarrow \ell = \frac{3}{\sqrt{3}} \Rightarrow \ell = \sqrt{3} \Rightarrow h = \frac{\sqrt{3}\sqrt{3}}{2} = \frac{3}{2}$$

Como a altura de um triângulo eqüilátero, inscrito em um círculo de raio r, equivale a $\dfrac{3r}{2}$, então

$\dfrac{3r}{2} = \dfrac{3}{2} \Rightarrow r = 1$.

Logo a área do círculo é π.

RESPOSTA: Alternativa c.

QUESTÃO Nº 21

Considere o conjunto $A = \left\{\dfrac{\sqrt{3}}{2}, \dfrac{7}{5}, \dfrac{1}{2}, \pi, \dfrac{\pi}{2}\right\}$ e a igualdade $y = \log_2 \log_{\frac{1}{2}}\left(x^2 - x + 1\right)$. Em A, o número de elementos que x pode assumir, para que y seja real, é

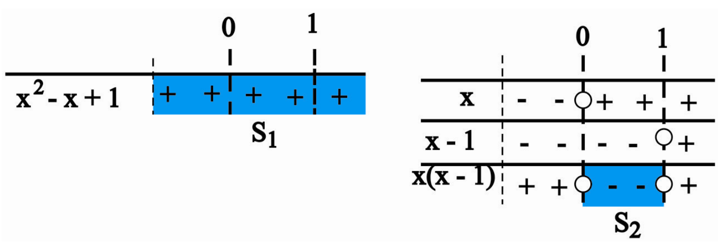
a) 1 b) 2 c) 3 d) 4 e) 5

RESOLUÇÃO:

Para que $y = \log_2 \log_{\frac{1}{2}}\left(x^2 - x + 1\right)$ seja um número real, $\log_{\frac{1}{2}}\left(x^2 - x + 1\right) > 0$ e $x^2 - x + 1 > 0$.

$$\begin{cases} \log_{\frac{1}{2}}\left(x^2 - x + 1\right) \geq 0 \\ x^2 - x + 1 > 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \log_{\frac{1}{2}}\left(x^2 - x + 1\right) > \log_{\frac{1}{2}} 1 \\ x^2 - x + 1 > 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x^2 - x + 1 < 1 \\ x^2 - x + 1 > 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x^2 - x < 0 \\ x^2 - x + 1 > 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x(x-1) < 0 \\ x^2 - x + 1 > 0 \end{cases}.$$

O trinômio $x^2 - x + 1$ não tem raízes reais, pois, $\Delta = 1 - 4 = -3 < 0$ e como o coeficiente de x^2 é um número positivo ele somente assume valores positivos.



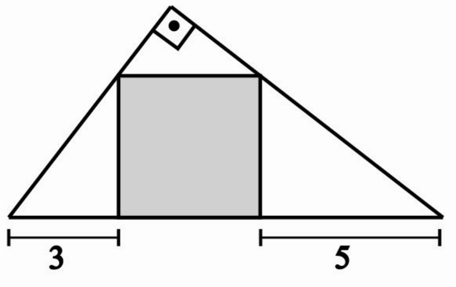
Sendo S = $S_1 \cap S_2$, então S = $]0,1[$ $\Rightarrow$ **Os valores de** $A = \left\{\dfrac{\sqrt{3}}{2}, \dfrac{7}{5}, \dfrac{1}{2}, \pi, \dfrac{\pi}{2}\right\}$ que x pode assumir são

$\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ e $\dfrac{1}{2}$

RESPOSTA: Alternativa b.

QUESTÃO Nº 22

A área do quadrado assinalado na figura é igual a

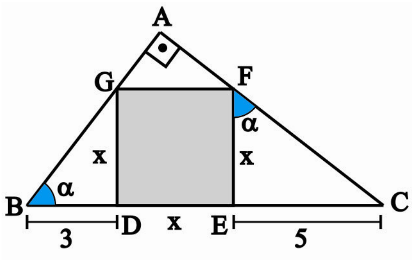


a) 15 b) 20 c) 12
d) 18 e) 16

RESOLUÇÃO:

Na figura ao lado os triângulos retângulos BDG e FEC,

portanto: $\frac{x}{3} = \frac{5}{x} \Rightarrow x^2 = 15 = S_{DEFG}$.



RESPOSTA: Alternativa a.

QUESTÃO Nº 23

Uma circunferência de centro (4,y), com $y \in \mathbf{Z}$, é tangente às retas $x + y - 2 = 0$ e $x - 7y + 2 = 0$. O raio dessa circunferência é

a) 4 b) 5 c) $4\sqrt{2}$ d) $5\sqrt{2}$ e) $6\sqrt{2}$

RESOLUÇÃO:

$$R = \frac{|4 + y - 2|}{\sqrt{2}} = \frac{|4 - 7y + 2|}{\sqrt{50}} \Rightarrow 5|2 + y| = |6 - 7y|, \text{ considerando } 2 + y > 0 \Rightarrow y > -2 \Rightarrow$$

$$\begin{cases} 5(2+y) = 6 - 7y \\ 5(2+y) = -6 + 7y \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 4 + 12y = 0 \\ 16 - 2y = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = -\frac{1}{3} \notin Z \\ y = 8 \in Z \end{cases} \Rightarrow y = 8$$

Substituindo y = 8 em $R = \frac{|2 + y|}{\sqrt{2}} = \frac{10\sqrt{2}}{2} = 5\sqrt{2}$.

RESPOSTA: Alternativa d.

QUESTÃO Nº 24

I) sen 2 < 0

II) Se a probabilidade de um casal ter um filho do sexo masculino é $\frac{1}{4}$, então a probabilidade de o casal ter dois filhos de sexos diferentes é $\frac{3}{8}$.

III) O raio de um cilindro reto é aumentado de 25%; para que o volume do cilindro permaneça o mesmo, a sua altura deve ser diminuída de 36%.

Considerando **I**, **II** e **III** acima,

a) somente **I** está correta.
b) somente **I** e **III** estão corretas.
c) somente **II** e **III** estão corretas.
d) somente **III** está correta.
e) somente **II** está correta.

RESOLUÇÃO:

I) FALSA.

$$\frac{2}{x} = \frac{3{,}14}{180°} \Rightarrow 3{,}14x = 360° \Rightarrow x \cong 114{,}65° \Rightarrow \text{sen}2 > 0\,.$$

II) VERDADEIRA.

Se a probabilidade de um casal ter um filho do sexo masculino é $\frac{1}{4}$, então

a probabilidade de o casal ter um filho do sexo feminino é $\frac{3}{4}$.

Logo a probabilidade de o casal ter dois filhos de sexos diferentes é $\frac{3}{4}\times\frac{1}{4}+\frac{1}{4}\times\frac{3}{4}=\frac{6}{16}=\frac{3}{8}$.

III) VERDADEIRA.

Considere-se o volume do cilindro reto de raio R e altura H, como $V = \pi R^2 H$.

Se o raio do cilindro passa a ser 1,25R e a altura 0,64H, o seu volume passará a ser

$V_1 = \pi(1{,}25R)^2 \times 0{,}64\,H = \pi\times 1{,}5625R^2 \times 0{,}64H = \pi R^2 H$

RESPOSTA: Alternativa c.

QUESTÃO Nº 25

Relativas ao sistema $\begin{cases} kx + 4ky = 0 \\ 3x + ky = 8 \end{cases}, k \in R$, considere as afirmações I, II e III abaixo.

I) Apresenta solução única para, exatamente, dois valores distintos de k.
II) Apresenta mais de 1 solução para um único valor de k.
III) É impossível para um único valor de k.
Dessa forma,
a) somente I está correta.
b) somente II e III estão corretas.
c) somente I e III estão corretas.
d) somente III está correta.
e) I, II e III estão corretas.

RESOLUÇÃO:

Pela Regra de Cramer:

$$\Delta = \begin{vmatrix} k & 4k \\ 3 & k \end{vmatrix} \text{ e } \Delta_y = \begin{vmatrix} k & 0 \\ 3 & 8 \end{vmatrix}.$$

I) FALSA.
$\Delta = \begin{vmatrix} k & 4k \\ 3 & k \end{vmatrix} \neq 0 \Rightarrow k^2 - 12k \neq 0 \Rightarrow k \neq 0 \text{ ou } k \neq 12 \Rightarrow$ O sistema $\begin{cases} kx + 4ky = 0 \\ 3x + ky = 8 \end{cases}, k \in R$ apresenta solução única para infinitos valores de k.
II) **VERDADEIRA.**
$\Delta_y = \begin{vmatrix} k & 0 \\ 3 & 8 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow 8k = 0 \Rightarrow k = 0 \Rightarrow$ O sistema apresenta mais de 1 solução para k = 0.
III) **VERDADEIRA.**
O sistema é impossível para k = 12.

RESPOSTA: alternativa b.

14 / 12 / 2010

QUESTÃO Nº 19

Em uma sequência numérica, a soma dos n primeiros termos é $3n^2 + 2$, com n natural não nulo. O oitavo termo da sequência é
a) 36 b) 39 c) 41 d) 43 e) 45

RESOLUÇÃO:

Tem-se que $S_8 = S_7 + a_8 \Rightarrow a_8 = S_8 - S_7$

$S_n = 3n^2 + 2$, então, $S_8 = 3(8)^2 + 2 = 194$ e $S_7 = 3(7)^2 + 2 = 149$.

Logo, $a_8 = S_8 - S_7 = 194 - 149 = 45$.

RESPOSTA: Alternativa e.

Questão no20

A média aritmética de 20 números em progressão aritmética é 40. Retirados o primeiro e o último termos da progressão, a média aritmética dos restantes será

a) 20 b) 25 c) 30 d) 35 e) 40

RESOLUÇÃO:

Se a média aritmética de 20 números em progressão aritmética é 40, então a soma dos 20 termos é 20 × 40 = 800.

Então, $S_{20} = \dfrac{(a_1 + a_{20}).20}{2} = 800 \Rightarrow 10(a_1 + a_{20}) = 800 \Rightarrow (a_1 + a_{20}) = 80$.

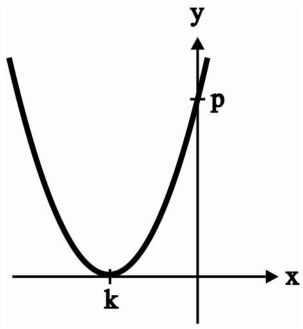
Retirados o primeiro e o último termos da progressão, a média aritmética dos restantes será:

$\dfrac{800-80}{20-2} = \dfrac{720}{18} = 40.$

RESPOSTA: Alternativa e.

QUESTÃO Nº 21

Na figura, temos o gráfico da função real definida por $y = x^2 + mx + (8 - m)$. O valor de $k + p$ é



a) –2 b) 2 c) –1
d) 1 e) 3

RESOLUÇÃO:

Como a parábola é tangente ao eixo Ox no ponto (k , 0), vértice da parábola:

$\Delta = 0 \Rightarrow m^2 - 4(8 - m) = 0 \Rightarrow m^2 + 4m - 32 = 0 \Rightarrow$

$m = \dfrac{-4 \pm \sqrt{16+128}}{2} = \dfrac{-4 \pm 12}{2} \Rightarrow m = -8 \text{ ou } m = 4.$

$\dfrac{-m}{2} = k \text{ e } k < 0 \Rightarrow m = 4 \Rightarrow k = \dfrac{-(4)}{2} = -2.$

$8 - m = p \Rightarrow p = 8 - 4 = 4 \Rightarrow k + p = -2 + 4 = 2.$

RESPOSTA: Alternativa b.

Questão no 22

Assinale, dentre os valores abaixo, um possível valor de x tal que $\log_{\frac{1}{4}} x > \log_4 7$

a) $\dfrac{1}{14}$ b) $\dfrac{14}{15}$ c) $\dfrac{1}{5}$ d) $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ e) $\dfrac{3}{5}$

RESOLUÇÃO:

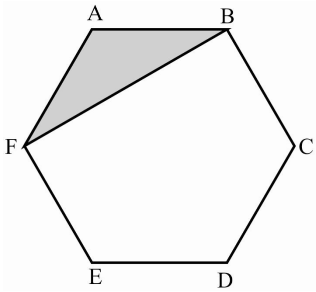
$$\log_{\frac{1}{4}} x > \log_4 7 \Rightarrow \frac{\log_4 x}{\log_4\left(\frac{1}{4}\right)} > \log_4 7 \Rightarrow \frac{\log_4 x}{-1} > \log_4 7 \Rightarrow \log_4 x < -\log_4 7 \Rightarrow x < 7^{-1} \Rightarrow$$

$0 < x < \dfrac{1}{7} \Rightarrow$ Um possível valor de x é $\dfrac{1}{14}$.

RESPOSTA: Alternativa a.

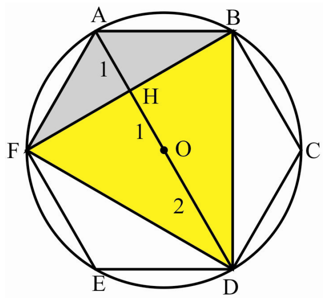
QUESTÃO Nº 23

Na figura, ABCDEF é um hexágono regular e a distância do vértice D à diagonal FB é 3. A área do triângulo assinalado é



a) $\sqrt{3}$ b) $2\sqrt{3}$ c) $4\sqrt{3}$
d) 3 e) 6

RESOLUÇÃO:



A diagonal BF é lado do triângulo equilátero BFD, então AD é perpendicular a BF e a medida de DH é igual a $\frac{3}{2}$ da medida do raio.

Tem-se então $\frac{3}{2}r = 3 \Rightarrow 3r = 6 \Rightarrow r = 2$.

Como a medida do lado do hexágono regular inscrito numa circunferência é igual à medida do raio, AB = AF = 2

O ângulo $F\hat{A}B$ mede 120°, assim a área do triângulo BAF é:

$$S = \frac{1}{2} \times AF \times AB \times \text{sen}120° = \frac{1}{2} \times 2 \times 2 \times \frac{\sqrt{3}}{2} = \sqrt{3}.$$

RESPOSTA: Alternativa a.

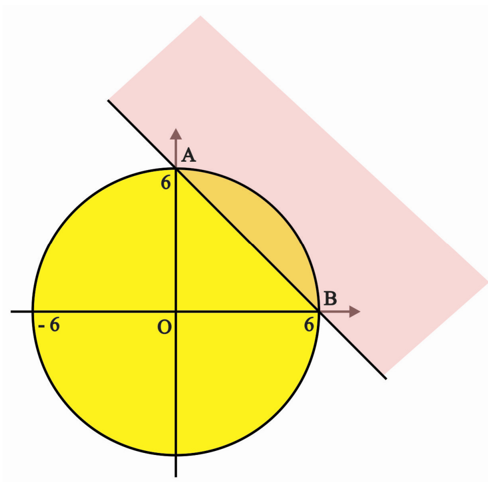
QUESTÃO Nº 24

Os pontos (x,y) do plano tais que $x^2 + y^2 \le 36$, com $x + y \ge 6$, definem uma região de área
a) $6(\pi - 2)$ b) $9 - \pi$ c) $9(\pi - 2)$ d) $6 - \pi$ e) $18(\pi - 2)$

RESOLUÇÃO:

$x + y \ge 6 \Rightarrow y \ge -x + 6$.

Os pontos (x,y) do plano tais que $x^2 + y^2 \le 36$, com $x + y \ge 6$, definem uma região de área que é a interseção das regiões $x^2 + y^2 \le 36$ e $y \ge -x + 6$, conforme figura ao lado:



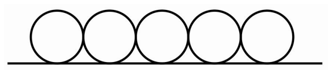
A área da região destacada é então:

$$S = \frac{\pi \times (r)^2}{4} - S_{AOB} = \frac{\pi \times (6)^2}{4} - \frac{6 \times 6}{2} = 9\pi - 18 = 9(\pi - 2)$$

RESPOSTA: Alternativa c.

QUESTÃO Nº 25

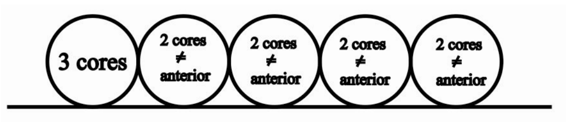
Cada um dos círculos da figura deverá ser pintado com uma cor, escolhida dentre três disponíveis. Sabendo que dois círculos consecutivos nunca serão pintados com a mesma cor, o número de formas de se pintar os círculos é



a) 72 b 68 c) 60 d) 54 e) 48

RESOLUÇÃO:

O primeiro círculo da esquerda pode ser pintado com qualquer uma das três cores disponíveis. Escolhida a cor para pintá-lo, sobrarão 2 cores para o 2º círculo; escolhida a cor para pintar o 2º, sobrarão 2 cores para o 3º círculo e assim por diante, ou seja sempre haverá apenas 2 opções de cores para os seguintes.
Total de formas diferentes de pintar a figura: $3 \times 2^4 = 48$.



RESPOSTA: Alternativa e.

16/06/2011
PROVA DE RACIOCÍNIO LÓGICO-MATEMÁTICO

QUESTÃO Nº 16.

Se $a + \frac{1}{a} = 10$, então $a^2 + \frac{1}{a^2}$ é igual a

a) 90 b) 92 c) 96 d) 98 e) 102

RESOLUÇÃO:

Elevando ao quadrado os dois membros da igualdade $a + \frac{1}{a} = 10 \Rightarrow$

$$\left(a + \frac{1}{a}\right)^2 = 10^2 \Rightarrow a^2 + \frac{1}{a^2} + 2 = 100 \Rightarrow a^2 + \frac{1}{a^2} = 98 .$$

RESPOSTA: Alternativa d.
QUESTÃO Nº 17

João gastava 40% de seu salário com o pagamento mensal de 1 dívida. Em um determinado mês, o salário do João aumentou de 8% e o valor do pagamento mensal da dívida aumentou de 20%, o que representou um aumento desse pagamento para, aproximadamente,

a) 41,00% do seu salário.

b) 42,22% do seu salário.
c) 44,44% do seu salário.
d) 49,99% do seu salário.
e) 51,00% do seu salário.

RESOLUÇÃO:

Salário inicial	Pagamento mensal da dívida.	Salário novo	Novo pagamento mensal da dívida.
x	0,4x	1,08x	1,2×0,4x= 0,48x

$$\frac{\text{Pagamento mensal}}{\text{Salário novo}} = \frac{0{,}48x}{1{,}08x} = \frac{4}{9} = 0{,}4444... \cong 44{,}44\% \text{.}$$

RESPOSTA: Alternativa c.

QUESTÃO Nº 18

40 etiquetas numeradas, 10, na cor verde; 10, na cor branca; 10, na cor amarela e 10 na cor azul, foram colocadas em uma urna. Sorteadas, consecutivamente, duas delas, a probabilidade de serem ambas da mesma cor é

a) $\frac{1}{4}$ b) $\frac{3}{13}$ c) $\frac{1}{10}$ d) $\frac{5}{13}$ e) $\frac{1}{20}$

RESOLUÇÃO:

$$\frac{10}{40}\times\frac{9}{39}+\frac{10}{40}\times\frac{9}{39}+\frac{10}{40}\times\frac{9}{39}+\frac{10}{40}\times\frac{9}{39} = 4\times\left(\frac{10}{40}\times\frac{9}{39}\right) = \frac{3}{13}$$

RESPOSTA: Alternativa b.

QUESTÃO Nº 19

Em um processo de seleção, aplicado a 50 pessoas, a nota média dos homens foi 4,0 , a nota média das mulheres foi 6,0 e a média geral de todos os participantes foi 5,4. Participaram, do processo,

a) 15 homens.
b) 18 homens.
c) 20 homens.
d) 22 homens.
e) 24 homens.

RESOLUÇÃO:

Considerando como x o número de homens e como y o de mulheres, tem-se o sistema:

$$\begin{cases} x + y = 50 \\ \dfrac{4x+6y}{50} = 5{,}4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x + y = 50 \\ \dfrac{2x+3y}{25} = 5{,}4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x + y = 50 \\ 2x + 3y = 135 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2x + 2y = 100 \\ 2x + 3y = 135 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = 35 \\ x = 15 \end{cases}.$$

RESPOSTA: Alternativa a

QUESTÃO Nº 20

As soluções reais da equação $x^{-2} = |x|$ são em número de

a) 4 b) 1 c) 5 d) 3 e) 2

RESOLUÇÃO:

Sendo $|x| = \begin{cases} x, \text{ se } x \geq 0 \\ -x, \text{ se } x < 0 \end{cases}$, então da equação $x^{-2} = |x|$, tem-se:

$$\left(x^{-2} = -x \text{ ou } x^{-2} = x\right) \Rightarrow \left(\frac{1}{x^2} = -x \text{ ou } \frac{1}{x^2} = x\right) \Rightarrow \left(x^3 = -1 \text{ ou } x^3 = 1\right) \Rightarrow \left(x = -1 \text{ ou } x = 1\right) \Rightarrow$$

As raízes da equação $x^{-2} = |x|$ são $x = -1$ ou $x = 1$.

RESPOSTA: Alternativa e.

17/06/2011

M ATEMÁTICA

QUESTÃO Nº 19

No intervalo $[0;\pi]$, seja k o número de valores reais de x tais que $\text{sen}^2 x = |\cos x|$.
Dessa forma,

a) $\text{sen}(2k) > 0$ b) $\text{sen}\left(\frac{k}{2}\right) < 0$ c) $tg(2k) > 0$ d) $\cos(3k) < 0$ e) $\cos\left(\frac{k}{2}\right) < 0$

RESOLUÇÃO:

Se $x \in [0, \pi]$ e $|\cos x| = \cos x$, para $x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ ou $|\cos x| = -\cos x$, para $x \in \left]\frac{\pi}{2}, \pi\right]$, então,

$$\text{sen}^2 x = |\cos x| \Rightarrow \begin{cases} \text{sen}^2 x = -\cos x, \text{ para } x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right] \\ \text{sen}^2 x = \cos x, \text{ para } x \in \left]\frac{\pi}{2}, \pi\right] \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \cos^2 x - 1 = -\cos x \\ \cos^2 x - 1 = \cos x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \cos^2 x + \cos x - 1 = 0 \\ \cos^2 x - \cos x - 1 = 0 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} \cos x = \dfrac{-1 \pm \sqrt{1+4}}{2} = \dfrac{-1 \pm \sqrt{5}}{2} \\ \text{ou} \\ \cos x = \dfrac{1 \pm \sqrt{1+4}}{2} = \dfrac{1 \pm \sqrt{5}}{2} \end{cases} \Rightarrow \cos x = \frac{-1+\sqrt{5}}{2} \text{ ou } \cos x = \frac{1-\sqrt{5}}{2} \Rightarrow k = 2 = \alpha \text{ rad}.$$

$$\frac{180°}{\pi \text{ rad}} = \frac{\alpha}{2 \text{ rad}} \Rightarrow \alpha = \frac{360°}{3{,}14} \cong 114{,}65° \Rightarrow \text{sen}(2k) < 0;\ \text{sen}\left(\frac{k}{2}\right) > 0;\ tg(2k) > 0;\ \cos(3k) > 0 \text{ e } \cos\left(\frac{k}{2}\right) > 0$$

Logo a única alternativa verdadeira é $\text{tg}(2k) > 0$.

RESPOSTA: Alternativa c.

QUESTÃO Nº 20

Seja t a reta bissetriz dos ângulos agudos formados pelas retas (r) $\sqrt{3}\,x + y - 5 = 0$ e (s) $\sqrt{3}\,x - y - 2 = 0$. Considere um ponto $B \in t$, cuja a distância à reta s seja 3. Dessa forma, a distância da intersecção das retas r e s à projeção de B sobre r é

a) $\sqrt{3}$ b) 4 c) $2\sqrt{3}$ d) $3\sqrt{3}$ e) 5

RESOLUÇÃO:

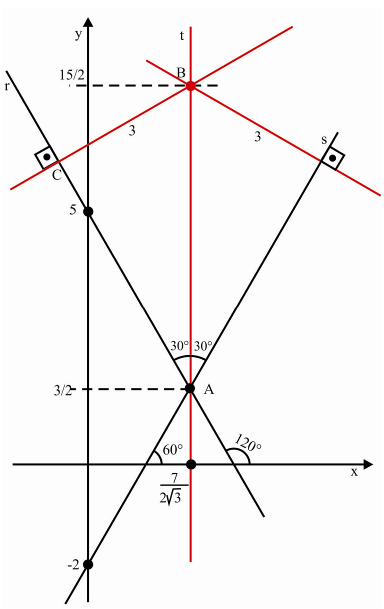
Determinação do ponto $A = r \cap s$:

$$\begin{cases} \sqrt{3}x + y = 5 \\ \sqrt{3}x - y = 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2\sqrt{3}x = 7 \\ x = \dfrac{7}{2\sqrt{3}} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \sqrt{3}\left(\dfrac{7}{2\sqrt{3}}\right) + y = 5 \\ y = \dfrac{3}{2} \end{cases} \Rightarrow$$

$$A = \left(\frac{7}{2\sqrt{3}}, \frac{3}{2}\right)$$

No triângulo retângulo ABC a medida de $\overline{AB}$ é a distância entre os pontos $A = r \cap s$ e B pertencente à reta t, bissetriz bissetriz dos ângulos agudos formados pelas retas r e s, tem-se:

$$\text{tg}30° = \frac{BC}{AC} \Rightarrow \frac{\sqrt{3}}{3} = \frac{3}{AC} \Rightarrow AC = \frac{9}{\sqrt{3}} = 3\sqrt{3},$$



RESPOSTA: Alternativa d.

QUESTÃO Nº 21

Os valores de k, para que o sistema $\begin{cases} x - y + z = 2 \\ 3x + ky + z = 1 \\ -x + y + kz = 3 \end{cases}$ não tenha solução real, são os 2 primeiros termos de uma progressão aritmética de termos crescentes.

Então, nessa PA, o logaritmo na base $\sqrt{3}$ do quadragésimo terceiro termo é

a) 8 b) 10 c) 12 d) 14 e) 16

RESOLUÇÃO:

Aplicando a Regra de Cramer ao sistema:

$$\begin{cases} x - y + z = 2 \\ 3x + ky + z = 1 \\ -x + y + kz = 3 \end{cases} \Rightarrow \Delta = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 3 & k & 1 \\ -1 & 1 & k \end{vmatrix} = k^2 + 3 + 1 + k - 1 + 3k \Rightarrow \Delta = k^2 + 4k + 3$$

Para o sistema não ter solução real

$$\Delta = 0 \Rightarrow k^2 + 4k + 3 = 0 \Rightarrow k = \frac{-4 \pm \sqrt{16-12}}{2} \Rightarrow k = \frac{-4 \pm 2}{2} \Rightarrow k = -3 \text{ ou } k = -1$$

Então tem-se a progressão aritmética de termos crescentes: $(-3,-1,1,3,...)$ de razão $r = -1 - (-3) = 2$.

O quadragésimo terceiro termo desta P.A. é: $a_{43} = -3 + (43-1) \times 2 = -3 + 84 = 81$.

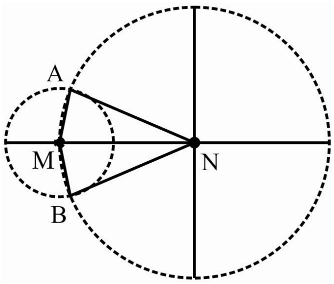
Logo: $\log_{\sqrt{3}} a_{43} = \log_{\sqrt{3}} 81 = \log_{\sqrt{3}} 3^4 = x \Rightarrow \left(\sqrt{3}\right)^x = 3^4 \Rightarrow \frac{x}{2} = 4 \Rightarrow x = 8$.

RESPOSTA: Alternativa a.

QUESTÃO Nº 22

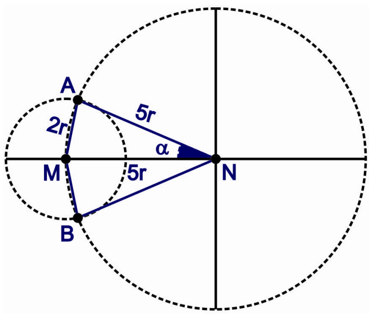
Na figura, os raios das circunferências de centros M e N são, respectivamente, 2r e 5r. Se a área do quadrilátero AMBN é $16\sqrt{6}$, o valor de r é:

a) 1 b) 2 c) 3 d) 4 e) 5



RESOLUÇÃO:

Aplicando a Lei dos Cossenos no triângulo AMN em relação ao ângulo α:



$4r^2 = 25r^2 + 25r^2 - 2 \times 5r \times 5r \times \cos\alpha \Rightarrow$

$50r^2 \cos\alpha = 46r^2 \Rightarrow \cos\alpha = \frac{23}{25}$

$\cos\alpha = \frac{23}{25} \Rightarrow \frac{529}{625} + \text{sen}^2\alpha = 1 \Rightarrow \text{sen}^2\alpha = \frac{96}{625} \Rightarrow$

$\text{sen}\alpha = \frac{4\sqrt{6}}{25}$

$$\text{Se } \cos\alpha = \frac{23}{25} \Rightarrow \frac{529}{625} + \text{sen}^2\alpha = 1 \Rightarrow \text{sen}^2\alpha = \frac{96}{625} \Rightarrow \text{sen}\alpha = \frac{4\sqrt{6}}{25}$$

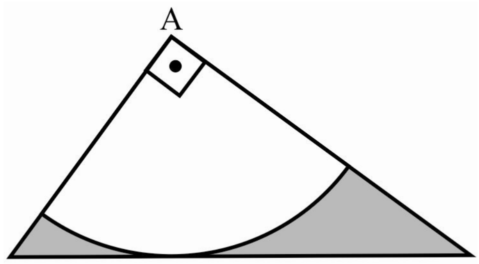
Se a área do quadrilátero AMBN é $16\sqrt{6}$, a área do triângulo AMN é $8\sqrt{6}$, então:

$$8\sqrt{6} = \frac{1}{2} \times 5r \times 5r \times \text{sen}\alpha \Rightarrow 8\sqrt{6} = \frac{1}{2} \times 25r^2 \times \frac{4\sqrt{6}}{25} \Rightarrow 8 = 2r^2 \Rightarrow r^2 = 4 \Rightarrow r = 2.$$

RESPOSTA: Alternativa b.

QUESTÃO Nº 23

Na figura, os catetos do triângulo medem 3 e 4 e o arco de circunferência tem centro A.
Dentre as alternativas, fazendo $\pi = 3$, o valor mais próximo da área assinalada é:

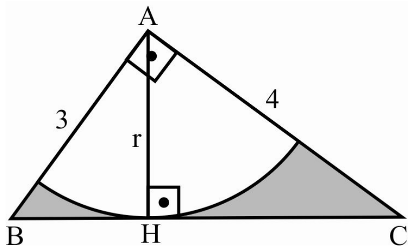


a) 3,15
b) 2,45
c) 1,28
d) 2,60
e) 1,68

RESOLUÇÃO:

O triângulo ABC é Pitagórico então BC = 5.
O raio do setor circular de centro A tem medida igual a da altura do triângulo ABC em relação à hipotenusa.
Utilizando a relação ah = bc, vem: $5r = 12 \Rightarrow r = 2{,}4$.
A área procurada é:

$$S = \frac{3\times 4}{2} - \frac{\pi(2{,}4)^2}{4} = 6 - \frac{5{,}76\times 3}{4} = 6 - 4{,}32 = 1{,}68$$



RESPOSTA: Alternativa e.

QUESTÃO Nº 24

Se m , n e p são inteiros positivos tais que $m = \frac{3p}{7}$ e $n = 48 - 3p$, então, para o menor valor possível de p , a soma **m + n** é igual a

a) 30 b) 35 c) 38 d) 40 e) 42

RESOLUÇÃO:

Se p e $m = \frac{3p}{7}$ são inteiros positivos, para o menor valor possível de p, p = 7 e $m = \frac{3p}{7} = \frac{3\times 7}{7} = 3$
O valor de n é: 48 – 3p = 48 – 21 = 27.
Então **m + n** = 27 + 3 = 30.

RESPOSTA: Alternativa a.

QUESTÃO Nº 25

Considere todos os possíveis telefones celulares, com números de 8 algarismos e primeiro algarismo 9.
Mantido o primeiro algarismo 9, se os telefones passarem a ter 9 algarismos, haverá um aumento de
a) 10^7 números telefônicos.
b) 10^8 números telefônicos.
c) 9.10^7 números telefônicos.
d) 9.10^8 números telefônicos.
e) 9.10^9 números telefônicos.

RESOLUÇÃO:

Possibilidades de números de telefones celulares iniciando por 9 atualmente: 10^7.
Mantido o primeiro algarismo 9, os telefones passarem a ter 9 algarismos, haverá um total de possibilidades igual a 10^8.
Logo um aumento de $10^8 - 10^7 = 10^7 (10 - 1) = 9 \times 10^7$ números telefônicos.

RESPOSTA: Alternativa c.