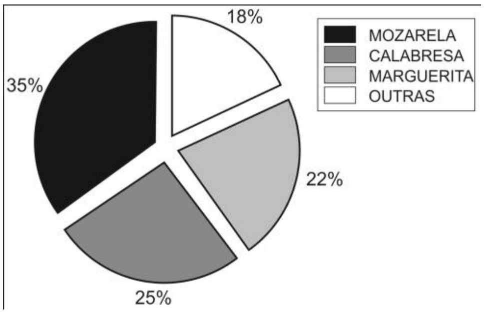
RESOLUÇÃO DA PROVA DE MATEMÁTICA UNICAMP-FASE 2. 2014

RESOLUÇÃO: PROFA. MARIA ANTÔNIA C. GOUVEIA

13. A pizza é, sem dúvida, o alimento preferido de muitos paulistas. Estima-se que o consumo diário no Brasil seja de 1,5 milhão de pizzas, sendo o Estado de São Paulo responsável por 53% desse consumo. O gráfico abaixo exibe a preferência do consumidor paulista em relação aos tipos de pizza.



a) Se não for considerado o consumo do Estado de São Paulo, quantas pizzas são consumidas diariamente no Brasil?
b) Quantas pizzas de mozarela e de calabresa são consumidas diariamente no Estado de São Paulo?

RESOLUÇÃO:

a) Pela estimativa acima o consumo diário no Brasil é de 1,5 milhão de pizzas, sendo o Estado de São Paulo responsável por 53% desse consumo, logo o restante do País consome 47%.
47% de 1,5 milhão de pizzas é exatamente igual a $0,47 \times 1.500.000 = 705.000$ pizzas.

RESPOSTA: Sem considerar o consumo do Estado de São Paulo, são consumidas diariamente no Brasil 705.000 pizzas.

b) O total de pizzas consumidas no Estado de São Paulo é de $0,53 \times 1.500.000 = 795.000$ pizzas. Deste número, 35% são de mozarela e 25% de calabresa.
$0,35 \times 795.000 = 278.250$ e $0,25 \times 795.000 = 198.750$.

RESPOSTA: Diariamente no Estado de São Paulo são consumidas 278.250 pizzas de mozarela e 198.750 de calabresa.

14. O peso médio (média aritmética dos pesos) dos 100 alunos de uma academia de ginástica é igual a 75 kg. O peso médio dos homens é 90 kg e o das mulheres é 65 kg.
a) Quantos homens frequentam a academia?
b) Se não são considerados os 10 alunos mais pesados, o peso médio cai de 75 kg para 72 kg. Qual é o peso médio desses 10 alunos?

RESOLUÇÃO:

a) Seja x o número de homens e y o de mulheres, logo, x + y = 100.
O peso total dos alunos da academia é 100×75kg = 7.500kg, assim, 90x + 65y = 7.500.

Tem-se o sistema $\begin{cases} x+y=100 \\ 90x+65y=7.500 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 65x+65y=6.500 \\ 90x+65y=7.500 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 25x=1.000 \\ x=40 \end{cases} \begin{cases} x=40 \\ y=60 \end{cases}$

RESPOSTA: Frequentam a academia 40 homens.

b) Considerando como p o peso médio desses 10 alunos mais pesados:

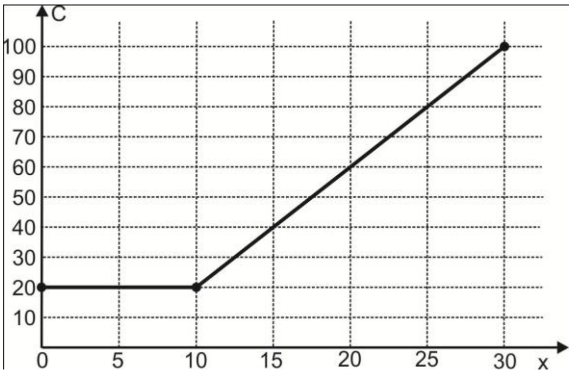
$$\frac{7500-10p}{100-10}=72 \Rightarrow 7500-10p=6480 \Rightarrow 10\text{p}=1020 \Rightarrow \text{p}=102$$

RESPOSTA: O peso médio desses 10 alunos é 102 kg.

15. O consumo mensal de água nas residências de uma pequena cidade é cobrado como se descreve a seguir. Para um consumo mensal de até 10 metros cúbicos, o preço é fixo e igual a 20 reais. Para um consumo superior, o preço é de 20 reais acrescidos de 4 reais por metro cúbico consumido acima dos 10 metros cúbicos. Considere *c(x)* a função que associa o gasto mensal com o consumo de *x* metros cúbicos de água.
a) Esboce o gráfico da função *c(x)* no plano cartesiano para *x* entre 0 e 30.
b) Para um consumo mensal de 4 metros cúbicos de água, qual é o preço efetivamente pago por metro cúbico? E para um consumo mensal de 25 metros cúbicos?

RESOLUÇÃO:

a) Para um consumo mensal de até 10 metros cúbicos, o preço em reais é dado pela função **c(x) = 20**.
Como para um consumo superior, o preço é de 20 reais acrescidos de 4 reais por metro cúbico consumido acima dos 10 metros cúbicos, a função que dá esse preço é
c(x) = 4(x – 10) + 20 ⇒ **c(x) = 4x – 20**
c(10) = 20 e c(30) = 120 – 20 = 100.



RESPOSTA: O gráfico ao lado representa a função *c(x)* no plano cartesiano para *x* entre 0 e 30.

b) c(4m^3) = 20 reais ⇒ o valor efetivo de 1 m^3 é 5 reais.
c(25m^3) = 4(25) – 20 = 80 reais ⇒ o valor efetivo de 1 m^3 é (80 : 25) = 3,20 reais.

RESPOSTAS: R$5, 00 e R$ 3,20.

16. Uma loteria sorteia três números distintos entre doze números possíveis.
a) Para uma aposta em três números, qual é a probabilidade de acerto?
b) Se a aposta em três números custa R$ 2,00, quanto deveria custar uma aposta em cinco números?

RESOLUÇÃO:

a) Como não importa a ordem do sorteio dos três números, existem $C_{12,3}=\frac{12\times 11\times 10}{3\times 2\times 1}=220$ ternos diferentes e possíveis.

Então para uma aposta em três números, a probabilidade de acerto é $p=\frac{1}{220}$.

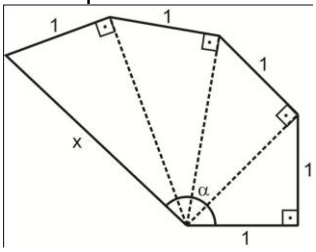
RESPOSTA: $\mathbf{p=\frac{1}{220}}$.

b) Numa aposta em cinco números existem $C_{5,3}=\frac{5\times 4\times 3}{3\times 2\times 1}=10$ ternos diferentes.

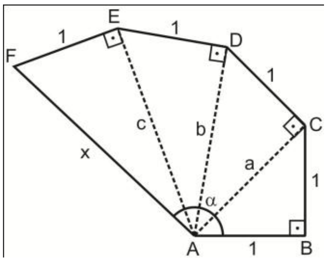
Considerando que a aposta em três números custa R$ 2,00, uma aposta em cinco números deveria 10 × R$ 2,00 = R$ 20,00.

RESPOSTA: R$20,00.

17. Considere um hexágono, como o exibido na figura abaixo, com cinco lados com comprimento de 1*cm* e um lado com comprimento de *x cm*.



a) Encontre o valor de *x.*
b) Mostre que a medida do ângulo α é inferior a 150°.



a) Aplicando o Teorema de Pitágoras a cada um dos 4 Δ s:

No Δ ABC: $a = \sqrt{1+1} = \sqrt{2}$;

no Δ ACD: $b = \sqrt{2+1} = \sqrt{3}$;

no Δ ADE: $c = \sqrt{3+1} = \sqrt{4} = 2$;

no Δ AEF: $x = \sqrt{4+1} = \sqrt{5}$.

RESPOSTA: O valor de x é $\sqrt{5}$.

b) tg(BÂC) = 1⇒ BÂC = 45°; tg(CÂD) = $\frac{1}{b} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2} < 1 \Rightarrow C\hat{A}D < 45°$;

tg(DÂE) = $\frac{1}{b} = \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3} \Rightarrow D\hat{A}E = 30°$; tg(EÂF) = $\frac{1}{c} = \frac{1}{2} < \frac{\sqrt{3}}{3} \Rightarrow E\hat{A}F < 30°$.

Se BÂC + DÂE = 75° e CÂD + EÂF < 75°, então, α = BÂC + DÂE + CÂD + EÂF < 75° + 75°.

RESPOSTA: α < 150°

18. Sejam *a* e *b* reais. Considere as funções quadráticas da forma $f(x) = x^2 + ax + b$, definidas para todo *x* real.
a) Sabendo que o gráfico de $y = f(x)$ intercepta o eixo *y* no ponto (0, 1) e é tangente ao eixo *x*, determine os possíveis valores de *a* e *b*.
b) Quando *a + b = 1*, os gráficos dessas funções quadráticas têm um ponto em comum. Determine as coordenadas desse ponto.

RESOLUÇÃO:

a) Se o gráfico de $y = f(x)$ intercepta o eixo *y* no ponto (0, 1), então, b = 1 e $f(x) = x^2 + ax + 1$.
Se o gráfico de $y = f(x)$ é tangente ao eixo *x,* $f(x)$ tem apenas uma raiz real, logo
$\Delta = a^2 - 4 = 0 \Rightarrow a = \pm 2$

RESPOSTA: Os possíveis valores de a são 2 e –2 e o de b é 1.

b) Sendo *a* + *b* = *1*, b = 1 – a, então, $f(x) = x^2 + ax + 1 - a$. O único valor de x que torna $ax - a = 0$ é x = 1, para todo valor de a. Assim: f(1) = 1 + a + 1 – a = 2 ⇒ que todas as funções quadráticas do tipo $f(x) = x^2 + ax + 1 - a$ passa no ponto (1, 2).

RESPOSTA: As coordenadas do ponto em comum a todas as funções quadráticas do tipo $\mathbf{f(x) = x^2 + ax + 1 - a}$ é (1,2).

19. Dizemos que uma sequência de números reais não nulos $(a_1, a_2, a_3, a_4, \ldots\ldots)$ é uma <u>progressão harmônica</u> se a sequência dos inversos $(1/a_1, 1/a_2, 1/a_3, 1/a_4, \ldots\ldots)$ é uma progressão aritmética (PA).

a) Dada a progressão harmônica $(2/5, 4/9, 1/2, \ldots\ldots)$, encontre o seu sexto termo.

b) Sejam *a*, *b* e *c* termos consecutivos de uma progressão harmônica. Verifique que b = 2ac/(a + b).

RESOLUÇÃO:

a) Sendo $(2/5, 4/9, 1/2, \ldots\ldots)$ uma progressão harmônica, então,

$\frac{1}{\frac{2}{5}}, \frac{1}{\frac{4}{9}}, \frac{1}{\frac{1}{2}}, \ldots\ldots = \frac{5}{2}, \frac{9}{4}, 2, \ldots\ldots$ é uma P.A, onde $a_1 = \frac{5}{2}$ e r = $\frac{9}{4} - \frac{5}{2} = -\frac{1}{4}$.

O 6º dessa P.A é $a_6 = \frac{5}{2} + (6-1)\left(-\frac{1}{4}\right) = \frac{5}{2} - \frac{5}{4} = \frac{5}{4}$.

Então o sexto termo da progressão harmônica $(2/5, 4/9, 1/2, \ldots\ldots)$ é $4/5$.

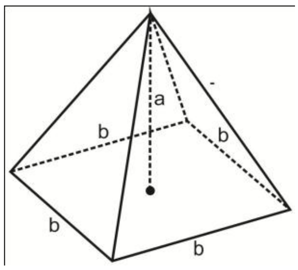
RESPOSTA: O 6º da progressão harmônica é 4/5.

b) Se *a*, *b* e *c* são termos consecutivos de uma progressão harmônica, então $\frac{1}{a}, \frac{1}{b}$ e $\frac{1}{c}$ são termos consecutivos de uma progressão aritmética.

O que implica em $\frac{1}{a} + \frac{1}{c} = \frac{2}{b} \Rightarrow bc + ab = 2ac \Rightarrow b(a+c) = 2ac \Rightarrow b = \frac{2ac}{a+c}$

RESPOSTA: Então $b = \frac{2ac}{a+c}$ como se queria verificar.

20. Considere a pirâmide reta de base quadrada, ilustrada na figura abaixo, com lado da base *b = 6m* e altura *a*.



a) Encontre o valor de *a* de modo que a área de uma face triangular seja igual a *15m²*.

b) Para *a = 2m*, determine o raio da esfera circunscrita à pirâmide.

RESOLUÇÃO:

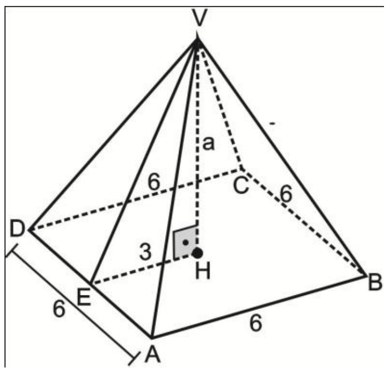
a) Como a pirâmide é reta tem o pé da sua altura coincide com o centro da base.

Aplicando o Teorema de Pitágoras ao triângulo retângulo VEH: $VE = \sqrt{a^2+9}$.

A área de uma face lateral é: $S = \frac{6.\sqrt{a^2+9}}{2} = 3\sqrt{a^2+9}$.

Sendo $15m^2$ o valor desta área:

$3\sqrt{a^2+9} = 15 \Rightarrow \sqrt{a^2+9} = 5 \Rightarrow a^2 + 9 = 25 \Rightarrow a^2 = 16 \Rightarrow a = 4$.



RESPOSTA: O valor de a é 4m.

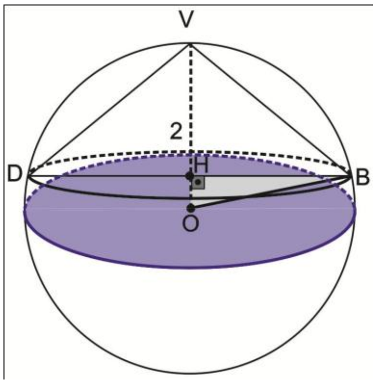
b) $\overline{BD}$ é uma das diagonais do quadrado ABCD, base da pirâmide, então $BD = 6\sqrt{2} \Rightarrow BH = 3\sqrt{2}$.

No triângulo retângulo BHO, $BH = 3\sqrt{2}$, OB = Raio$_{esfera}$ e OH = R – 2.

Pelo Teorema de Pitágoras:

$$R^2 = (R-2)^2 + \left(3\sqrt{2}\right)^2 \Rightarrow R^2 = R^2 - 4R + 4 + 18 \Rightarrow$$
$$4R = 22 \Rightarrow R = 5{,}5$$

RESPOSTA: O raio da esfera mede 5,5m.



21. A altura (em metros) de um arbusto em uma dada fase de seu desenvolvimento pode ser expressa pela função $h(t) = 0{,}5 + \log_3(t+1)$, onde o tempo $t \geq 0$ é dado em anos.

a) Qual é o tempo necessário para que a altura aumente de 0,5 m para 1,5 m?

b) Suponha que outro arbusto, nessa mesma fase de desenvolvimento, tem sua altura expressa pela função composta $g(t) = h(3t+2)$. Verifique que a diferença *g(t) – h(t)* é uma constante, isto é, não depende de *t*.

RESOLUÇÃO:

a) Se $h(t_0) = 0{,}5m \Rightarrow 0{,}5 + \log_3(t_0+1) = 0{,}5 \Rightarrow \log_3(t_0+1) = 0 \Rightarrow t_0 + 1 = 1 \Rightarrow t_0 = 0$.

Se $h(t_1) = 1{,}5m \Rightarrow 0{,}5 + \log_3(t_1+1) = 1{,}5 \Rightarrow \log_3(t_1+1) = 1 \Rightarrow t_1 + 1 = 3 \Rightarrow t_1 = 2$

Então: $t_1 - t_0 = 2$

RESPOSTA: 2 anos.

b) Se $g(t) = h(3t+2) \Rightarrow g(t) = 0{,}5 + \log_3(3t+2+1) \Rightarrow g(t) = 0{,}5 + \log_3(3t+3)$

g(t) – h(t) = $0{,}5 + \log_3(3t+3) - \left(0{,}5 + \log_3(t+1)\right) = \log_3(3t+3) - \log_3(t+1) \Rightarrow$

g(t) – h(t) = $\log_3\left(\frac{(3t+3)}{t+1}\right) = \log_3\left(\frac{3(t+1)}{t+1}\right) = \log_3 3 = 1 \Rightarrow$ *g(t) – h(t) = 1*

RESPOSTA: ***g(t) – h(t) é igual ao valor constante 1*****.**

22. Considere a matriz $A = \begin{pmatrix} a & 1 & 1 \\ -1 & 0 & b \\ c & -2 & 0 \end{pmatrix}$, onde *a, b* e *c* são números reais.

a) Encontre os valores de *a, b* e *c* de modo que $A^T = -A$.

b) Dados *a* = *1* e *b* = –*1*, para que valores de *c* e *d* o sistema linear $A\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ d \end{pmatrix}$.

tem infinitas soluções?

RESOLUÇÃO:

a) $A = \begin{pmatrix} a & 1 & 1 \\ -1 & 0 & b \\ c & -2 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow A^T = \begin{pmatrix} a & -1 & c \\ 1 & 0 & -2 \\ 1 & b & 0 \end{pmatrix}$ e $-A = \begin{pmatrix} -a & -1 & -1 \\ 1 & 0 & -b \\ -c & 2 & 0 \end{pmatrix}$

Sendo $A^T = -A \Rightarrow \begin{pmatrix} a & -1 & c \\ 1 & 0 & -2 \\ 1 & b & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -a & -1 & -1 \\ 1 & 0 & -b \\ -c & 2 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} a = -a \\ c = -1 \\ b = 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = 0 \\ c = -1 \\ b = 2 \end{cases}$

RESPOSTA: Os valores de *a, b* e *c* de modo que $A^T = -A$, são, respectivamente, 0, 2 e –1

b) Para *a = 1* e *b = – 1*, $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & -1 \\ c & -2 & 0 \end{pmatrix}$.

O sistema linear $A\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ d \end{pmatrix}$, fica assim $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & -1 \\ c & -2 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ d \end{pmatrix}$.

Para que este sistema tenha infinitas soluções deve-se ter det(A) = 0, $\Delta_x = 0$, $\Delta_y = 0$ e $\Delta_z = 0$.

$\begin{cases} x + y + z = 1 \\ -x - z = 1 \\ cx - 2y = d \end{cases} \Rightarrow \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & -1 \\ c & -2 & 0 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow 2 - c - 2 = 0 \Rightarrow c = 0$.

$\Delta z = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ c & -2 & d \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & -2 & d \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow 2 - d + 2 = 0 \Rightarrow d = 4$.

RESPOSTA: Para *a = 1* e *b = – 1*, os valores de *c* e *d* que tornam o sistema linear $A\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ d \end{pmatrix}$ são, respectivamente, 0 e 4.

23. O polinômio $p(x) = x^3 - 2x^2 - 9x + 18$ tem três raízes: *r* , – r e *s*.

a) Determine os valores de *r* e *s*.

b) Calcule *p(z)* para *z* = 1 + *i*, onde *i* é a unidade imaginária.

RESOLUÇÃO:

a) Fatorando o polinômio $p(x) = x^3 - 2x^2 - 9x + 18$:

$p(x) = x^2(x-2) - 9(x-2) \Rightarrow p(x) = (x-2)(x^2 - 9) \Rightarrow p(x) = (x-2)(x-3)(x+3)$

As raízes de $p(x)$ são os valores de x para os quais $p(x) = 0$.

Se $p(x) = 0$, então, $(x-2) = 0$ ou $(x-3) = 0$ ou $(x+3) = 0 \Rightarrow x = 2$ ou $x = 3$ ou $x = -3$.

As três raízes são 2, – 3 e 3.

RESPOSTA: Para – r = –3, tem-se r = 3 e s = 2. Para – r = 3, tem-se r = – 3 e s = 2.

b) $p(x) = (x-2)(x-3)(x+3) \Rightarrow p(1+i) = (1+i-2)(1+i-3)(1+i+3) \Rightarrow$

$p(1+i) = (-1+i)(-2+i)(4+i) \Rightarrow p(1+i) = (1-3i)(4+i) \Rightarrow \mathbf{p(1+i) = 7 - 11i}$

RESPOSTA: $p(1+i) = 7 - 11i$

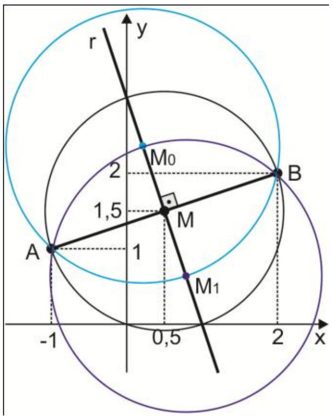
24. Considere no plano cartesiano os pontos $A = (-1,1)$ e $B = (2,2)$.

a) Encontre a equação que representa o lugar geométrico dos centros dos círculos que passam pelos pontos *A* e *B*.

b) Seja *C* um ponto na parte negativa do eixo das ordenadas. Determine *C* de modo que o triângulo ABC tenha área igual a 8.

RESOLUÇÃO:

a) O lugar geométrico dos centros dos círculos que passam pelos pontos *A* e *B* pertencem à mediatriz do segmento de reta determinado por esses dois pontos.



A mediatriz de um segmento de reta é a reta perpendicular a esse segmento pelo seu ponto médio.

Na figura ao lado r é a mediatriz do segmento $\overline{AB}$ e M seu ponto médio.

M = $\left(\frac{-1+2}{2}, \frac{1+2}{2}\right) = \left(\frac{1}{2}, \frac{3}{2}\right)$.

O coeficiente angular da mediatriz de $\overline{AB}$ é o simétrico do inverso do coeficiente angular da reta $\overleftrightarrow{AB}$:

$$a = -\left(\frac{x_A - x_B}{y_A - y_B}\right) = -\left(\frac{-1-2}{1-2}\right) = -2$$

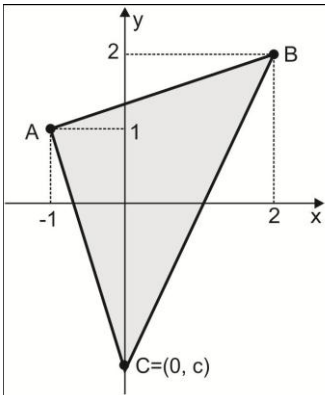
Então a equação de r é do tipo: y = – 2x + b. Como a reta passa por M = $\left(\frac{1}{2}, \frac{3}{2}\right)$:

$$\frac{3}{2} = -2\left(\frac{1}{2}\right) + b \Rightarrow b = \frac{3}{2} + \frac{2}{2} \Rightarrow b = \frac{5}{2} \Rightarrow \mathbf{y = -2x + \frac{5}{2}}$$

RESPOSTA: A equação que representa o lugar geométrico dos centros dos círculos que passam pelos pontos *A* e *B* é $\mathbf{y = -2x + \frac{5}{2}}$ ou $\mathbf{2y + 4x - 5 = 0}$.

b) A área do triângulo ABC pode ser calculada pela relação

$S = \frac{1}{2} \times |\Delta|$, sendo $\Delta = \begin{vmatrix} x_A & y_A & 1 \\ x_B & y_B & 1 \\ x_C & y_C & 1 \end{vmatrix}$.



$$\frac{1}{2} \times \left\| \begin{matrix} -1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 1 \\ 0 & c & 1 \end{matrix} \right\| = 8 \Rightarrow |-2 + 2c + c - 2| = 16 \Rightarrow$$

Logo $|3c - 4| = 16 \Rightarrow 3c - 4 = -16$ ou $3c - 4 = 16 \Rightarrow$

$c = -4$ ou $c = \frac{20}{3}$.

RESPOSTA: Como *c < 0*, então $\mathbf{c = -4}$