

PROVA DE MATEMÁTICA APLICADA VESTIBULAR 2013 - FGV
CURSO DE ADMINISTRAÇÃO
RESOLUÇÃO: Profa. Maria Antônia C. Gouveia

1. A Editora Progresso decidiu promover o lançamento do livro “*Descobrimo o Pantanal*” em uma Feira Internacional de Livros, em 2012. Uma pesquisa feita pelo departamento de Marketing estimou a quantidade de livros adquirida pelos consumidores em função do preço de cada exemplar.

Preço de Venda	Quantidade Vendida
R\$ 100,00	30
R\$ 90,00	40
R\$ 85,00	45
R\$ 80,00	50

Considere que os dados da tabela possam ser expressos mediante uma função polinomial do 1º grau $y = a.x + b$, em que x representa a quantidade de livros vendida e y , o preço de cada exemplar.

- a) Que preço de venda de cada livro maximizaria a receita da editora?
b) O custo unitário de produção de cada livro é de R\$ 8,00. Visando maximizar o lucro da editora, o gerente de vendas estabeleceu em R\$ 75,00 o preço de cada livro. Foi correta a sua decisão? Por quê?

RESOLUÇÃO:

$$\begin{cases} 100a + b = 30 \\ 90a + b = 40 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 10a = -10 \\ a = -1 \\ b = 130 \end{cases} \Rightarrow y = -x + 130$$

a) Sendo que x representa a quantidade de livros vendida e y , o preço de cada exemplar, então $R(x) = xy \Rightarrow R(x) = x(-x + 130) \Rightarrow R(x) = -x^2 + 130x \Rightarrow$ o valor de $R(x)$ vai ser máximo para $x = \frac{-130}{-2} = 65 \Rightarrow R(65) = -65^2 + 8450 = -4225 + 8450 = 4225 \Rightarrow$ o valor do livro que maximiza a receita é $\frac{4225}{65} = 65$

RESPOSTA: R\$ 65,00

b) $L(x) = R(x) - C(x) \Rightarrow L(x) = -x^2 + 130x - 8x \Rightarrow L(x) = -x^2 + 122x \Rightarrow L(x)$ assume o valor máximo para $x = \frac{-122}{-2} = 61 \Rightarrow L(61) = -61^2 + 122x \Rightarrow L(x) = -3721 + 7442 = 3721 \Rightarrow$ o preço de cada livro deve ser então $\frac{3721}{61} + 8 = 69$.

RESPOSTA: R\$ 69,00.

2. A editora fez também um estudo sobre o lançamento do livro em duas versões: capa dura e capa de papelão. A pesquisa mostrou que, se a versão capa dura for vendida por x reais e a versão capa de papelão por y reais, serão vendidos, no total, $130x + 70y - (x^2 + y^2)$ exemplares das duas versões. Por uma questão de estratégia, o gerente de vendas decidiu que a versão capa dura deve custar o dobro da versão capa de papelão.

- a) Qual deve ser o preço de venda de cada versão, de modo que a quantidade de livros vendida seja a maior possível?
b) Nas condições do item a), quantos exemplares a editora estima vender no total?

RESOLUÇÃO:

a) A expressão $130x + 70y - (x^2 + y^2)$ que representa o total de livros a ser vendido é uma função de x e y , ou seja: $f(x,y) = 130x + 70y - (x^2 + y^2)$. Como a versão capa dura deve custar o dobro da versão capa de papelão, $x = 2y \Rightarrow f(2y,y) = 260y + 70y - (4y^2 + y^2) \Rightarrow f(2y,y) = -5y^2 + 330y$.

$f(2y,y)$ assume valor máximo para $y = \frac{-330}{-10} = 33 \Rightarrow x = 66$.

RESPOSTA: O preço do livro de capa dura deve ser R\$ 66,00 e o do de capa de papelão R\$ 33,00.

b) Para $y = R\$33,00$, $f(2y,y) = -5(33)^2 + 330 \times 33 = 5445$.

RESPOSTA: 5445 livros.

3. No estande de vendas da editora foram selecionados 5 livros distintos, grandes, de mesmo tamanho, e 4 livros distintos, pequenos, de mesmo tamanho. Eles serão expostos em uma prateleira junto com um único exemplar de “*Descobrindo o Pantanal*”.

a) De quantas maneiras diferentes eles podem ser alinhados na prateleira, se os de mesmo tamanho devem ficar juntos e “*Descobrindo o Pantanal*” deve ficar em um dos extremos?

b) No final da feira de livros, a editora fez uma promoção. Numerou os livros da prateleira de 1 a 10, e sorteou um livro para o milésimo visitante do estande. Qual é a probabilidade expressa em porcentagem de o visitante receber um livro cujo número seja a média aritmética de dois números primos quaisquer compreendidos entre 1 e 10?

RESOLUÇÃO:

a)

LIVROS GRANDES 5!=120	LIVROS PEQUENOS 4!=24	“ <i>Descobrindo o Pantanal</i> ” 1	TOTAL 120.24.1=2880
LIVROS PEQUENOS 4!=24	LIVROS GRANDES 5!=120	“ <i>Descobrindo o Pantanal</i> ” 1	2880
“ <i>Descobrindo o Pantanal</i> ” 1	LIVROS GRANDES 5!=120	LIVROS PEQUENOS 4!=24	2880
“ <i>Descobrindo o Pantanal</i> ” 1	LIVROS PEQUENOS 4!=24	LIVROS GRANDES 5!=120	2880
TOTAL			11520

Ou: $2.2.5!.4! = 11\ 520$.

RESPOSTA: 11520 maneiras diferentes.

b) $\frac{2+2}{2} = 2$, $\frac{3+3}{2} = 3$, $\frac{3+5}{2} = 4$, $\frac{3+7}{2} = 5$, $\frac{5+5}{2} = 5$, $\frac{5+7}{2} = 6$ e $\frac{7+7}{2} = 7$.

O sorteado pode receber um dos livros numerados de 1 a 10, e entre estes números, os que são a média aritmética de dois números primos quaisquer compreendidos entre 1 e 10, são 2, 3, 4, 5, 6 e 7.

Logo a probabilidade pedida é: $\frac{6}{10} = 60\%$.

RESPOSTA: 60%.

4. Um funcionário do setor de planejamento da Editora Progresso verificou que as livrarias dos três clientes mais importantes estão localizadas nos pontos A (0,0), B (1,7) e C (8,6), sendo que as unidades estão em quilômetros.

a) Em que ponto P(x, y) deve ser instalado um depósito para que as distâncias do depósito às três livrarias sejam iguais?

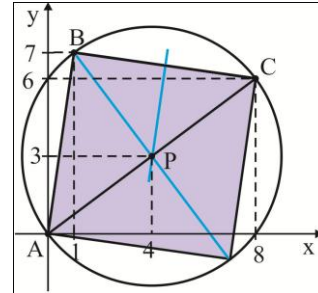
b) Qual é a área do quadrado inscrito na circunferência que contém os pontos A, B e C?

RESOLUÇÃO:

a) O ponto P equidistante dos três pontos A, B e C é o centro da circunferência que circunscreve o triângulo ABC.

Ao fazer o gráfico da questão nota-se que P é o ponto médio do

lado AC : $P = \left(\frac{8+0}{2}, \frac{6+0}{2} \right) \Rightarrow P = (4,3)$.



OUTRO MODO DE RESOLVER:

$$\begin{cases} PA = PC \\ PB = PA \\ PB = PC \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x^2 + y^2 = (x-8)^2 + (y-6)^2 \\ (x-1)^2 + (y-7)^2 = x^2 + y^2 \\ (x-1)^2 + (y-7)^2 = (x-8)^2 + (y-6)^2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 16x + 12y = 100 \\ 2x + 14y = 50 \quad (L_1/4; \quad 2L_2; \quad L_3/2) \\ 14x - 2y = 50 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 4x + 3y = 25 \\ 4x + 28y = 100 \quad (L_2 - L_1) \\ 7x - y = 25 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 4x + 3y = 25 \\ 25y = 75 \Rightarrow y = 3 \\ 7x - 3 = 25 \Rightarrow x = 4 \end{cases}$$

RESPOSTA: P(4, 3).

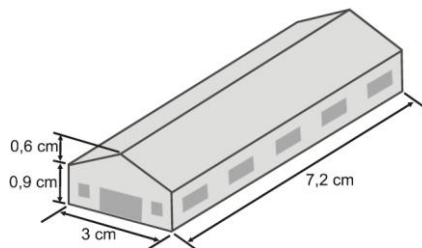
b) A medida do raio da circunferência que passa pelos pontos A, B e C (figura acima), é a metade do lado AC pois P é o ponto médio deste lado (O triângulo ABC é retângulo).

$$AC = \sqrt{8^2 + 6^2} = \sqrt{100} = 10 \Rightarrow \ell\sqrt{2} = 10 \Rightarrow \ell = 5\sqrt{2} \Rightarrow \ell^2 = 50$$

RESPOSTA: 50u.a.

5. A figura mostra a maquete do depósito a ser construído. A escala é 1 : 500, ou seja, 1 cm, na representação, corresponde a 500 cm na realidade.

Qual será a capacidade, em metros cúbicos, do depósito?



RESOLUÇÃO:

O depósito é constituído de um prisma retangular encimado por um prisma triangular.

Como sua maquete foi construída na escala 1 : 500 e representando as suas dimensões reais por **a**, **b**, **c** e **d**:

$$\frac{0,6}{a} = \frac{0,9}{b} = \frac{3}{d} = \frac{7,2}{c} = \frac{1}{500} \Rightarrow a = 300\text{cm}; \Rightarrow \\ b = 450\text{cm}; d = 1500\text{cm} \text{ e } c = 3600\text{cm}$$

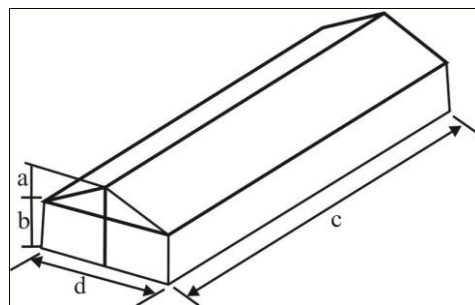
$$a = 3\text{m}; b = 4,5\text{m}; d = 15\text{m} \text{ e } c = 36\text{m}.$$

O volume do depósito, em m^3 , é:

$$4,5 \times 15 \times 36 + \frac{3 \times 15}{2} \times 36 = 2430 + 810 = 3240$$

Pode-se também pensar que o depósito tem a forma de um prisma reto cuja base é formada por dois trapézios de bases b e $a + b$, e altura é $d/2$. Assim o volume do depósito pode ser calculado:

$$2 \times \left[\frac{(b + a + b)}{2} \times \frac{d}{2} \right] \times c = 2 \times \frac{(4,5 + 7,5)}{2} \times \frac{15}{2} \times 36 = 2 \times 12 \times 15 \times 9 = 3240$$



RESPOSTA: 3240m³.

6. Em uma parede do estande de vendas havia um quadro de 50 cm de comprimento por 45 cm de largura, tendo ao redor uma moldura, como mostra a figura.



- Justifique por que não são semelhantes os retângulos interior e exterior à moldura.
- Existe algum número real positivo k que, substituído no lugar de 5 cm, faria com que os dois retângulos do item a) fossem semelhantes?

RESOLUÇÃO:

a) As razões entre as dimensões dos dois retângulos são: $\frac{C_i}{C_e} = \frac{50}{60} = \frac{5}{6}$ e $\frac{L_i}{L_e} = \frac{45}{55} = \frac{9}{11} \Rightarrow \frac{C_i}{C_e} \neq \frac{L_i}{L_e}$.

Portanto os retângulos não são semelhantes.

$$\text{b) } \frac{50}{50+2x} = \frac{45}{45+2x}, \text{ com } x > 0 \Rightarrow \frac{10}{50+2x} = \frac{9}{45+2x} \Rightarrow 450 + 20x = 450 + 18x \Rightarrow 2x = 0 \Rightarrow x = 0$$

Portanto não existe valor positivo de x que torne os retângulos semelhantes.

7. Uma livraria recebeu o pedido de um exemplar do livro “*Descobrimdo o Pantanal*”, para cada um de 11 clientes. Ela decidiu adquirir os 11 exemplares da Editora Progresso e vender os livros a seus clientes com um preço entre 5% e 10% a mais que o preço conseguido na editora. A editora lhe propôs duas opções:

(1ª) Comprar 10 livros e levar 1 de graça.

(2ª) Comprar 10 livros e pagar somente 9, adquirindo mais um exemplar, o 11º, com um desconto de 10% sobre o preço original.

a) Qual das opções é mais vantajosa à livraria?

b) Se o preço original de cada livro na editora for R\$ 54,00, qual é o maior lucro que a livraria pode obter com a venda dos 11 livros aos seus clientes, em cada caso?

RESOLUÇÃO:

a) Considerando que a editora venda cada livro ao preço x .

(1ª) Valor a ser pago na aquisição dos 11 livros: $10x$.

(2ª) Valor a ser pago na aquisição dos 11 livros: $9x + 0,9x = 9,9x$.

CONCLUSÃO: A segunda opção é mais vantajosa.

b) Cada livro deverá ser vendido por $(1 + 0,1) \times R\$54,00 = 1,1 \times R\$54,00 = R\$59,40$.

- Na primeira opção os 11 livros serão adquiridos por $10 \times R\$54,00 = R\$540,00$.
Os 11 livros serão vendidos por $11 \times R\$59,40 = R\$653,40$.
O lucro máximo será de $R\$653,40 - R\$540,00 = R\$113,40$.
- Na segunda opção os 11 livros serão adquiridos por $9,9 \times R\$54 = R\$ 534,60$.
Os 11 livros serão vendidos por $11 \times R\$59,40 = R\$653,40$.
O lucro máximo será de $R\$653,40 - R\$ 534,60 = R\$118,80$.

CONCLUSÃO: Em função do lucro a segunda opção é mais vantajosa.

8. Para o consumidor individual, a editora fez esta promoção na compra de certo livro: “Compre o livro com 12% de desconto e economize R\$ 10,80 em relação ao preço original”. Qual é o preço original do livro?

RESOLUÇÃO:

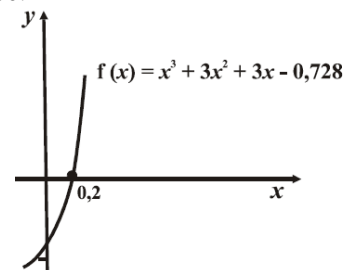
A economia é exatamente os 12% de desconto sobre o preço original. Logo: $0,12x = 10,80 \Rightarrow x = 90$.

RESPOSTA: R\$90,00.

9. A editora aplicou o lucro obtido em 2011, R\$ 100 000,00, em um fundo de renda fixa, a certa taxa de juro composta. Após 3 anos, deve receber um montante de R\$ 172 800,00.

a) A que taxa de juro anual aplicou seu dinheiro?

Use as informações do gráfico abaixo para justificar a sua resposta.



b) Qual é a soma das duas raízes complexas da equação $x^3 + 3x^2 + 3x - 0,728 = 0$ que não são números reais?

RESOLUÇÃO:

a) O montante de um capital C aplicado a uma taxa anual x por um período de n anos, é: $M = C \cdot (1+x)^n$.

$$172\,800 = 100\,000(1+x)^3 \Rightarrow 1 + 3x + 3x^2 + x^3 = 1,728 \Rightarrow x^3 + 3x^2 + 3x - 0,728 = 0$$

Pelo gráfico 0,2 é a raiz real da equação $x^3 + 3x^2 + 3x - 0,728 = 0$, logo a taxa de juro é 20% ao ano.

b) A soma das raízes da equação $x^3 + 3x^2 + 3x - 0,728 = 0$, é -3 , como uma de suas raízes é $0,2$, então a soma das duas raízes complexas é $-3 - 0,2 = -3,2$.

RESPOSTA: $-3,2$

10. Para trabalhar na Feira Internacional do Livro, a editora contratou três funcionários: Ana, Beto e Carlos, com salários x , y e z reais, respectivamente.

O salário de Ana é igual à soma dos salários de Beto e Carlos. No final da feira, a editora pagou uma gratificação, de valor igual ao salário de Beto, a cada um dos três. Assim, Ana recebeu no total, R\$ 2 300,00, e a soma dos valores que os três receberam foi de R\$ 5 400,00. Qual foi o valor da gratificação que receberam?

RESOLUÇÃO:

$$\begin{cases} x = y + z \\ x + y = 2300 \\ x + z + 4y = 5400 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2y + z = 2300 \\ 5y + 2z = 5400 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 4y + 2z = 4600 \\ 5y + 2z = 5400 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = 800 \\ x = 1500 \\ z = 700 \end{cases}$$

RESPOSTA: O valor da gratificação foi de R\$800.00