PROVAS DE MATEMÁTICA DA UFMG

VESTIBULAR– 2013 – 2ª ETAPA

RESOLUÇÃO: Profa. Maria Antônia Gouveia.

PROVA DE MATEMÁTICA “A” - 2ª Etapa 2º DIA

QUESTÃO 01
Janaína comprou um eletrodoméstico financiado, com taxa de 10% ao mês, em três prestações mensais iguais de R$ 132,00 cada, devendo a primeira prestação ser paga um mês após a compra.
Considerando essas informações, responda às questões em cada um dos seguintes contextos:
1. Janaína atrasou o pagamento da primeira prestação e vai pagá-la com a segunda prestação, quando esta vencer.
CALCULE o valor total que ela deverá pagar neste momento

2. Janaína deseja quitar sua dívida na data do vencimento da segunda prestação, pagando a primeira prestação atrasada, a segunda na data correta e a terceira prestação adiantada.
CALCULE quanto ela deverá pagar ao todo neste momento.

3. Janaína teve alguns problemas que a impediram de pagar a primeira e a segunda prestações nas datas corretas.
CALCULE quanto ela deverá pagar se quiser quitar as três prestações na data de vencimento da última.

RESOLUÇÃO:

1. Janaína deverá pagar pela primeira prestação em atraso; $1{,}10 \times 132 = 145{,}20$
O total de valor que deverá pagar neste momento é de 145,20 + 132,00= 277,20

RESPOSTA: R$277,20.

2. Janaína deverá pagar pela primeira prestação $1{,}10 \times 132 = 145{,}20$; pela segunda prestação 132,00 e pelo pagamento da terceira antecipada $\frac{132}{(1+0{,}1)} = 120{,}00$.
Total do pagamento: 145,20 + 132,00 + 120,00 = 397,20.

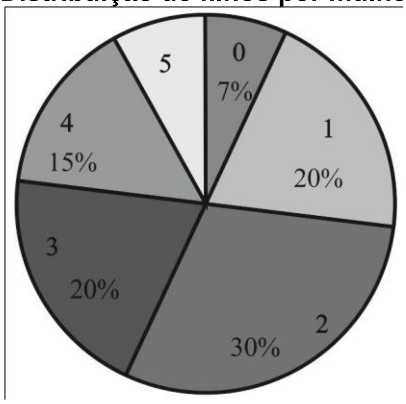
RESPOSTA: R$397,20.

3. Janaína deverá pagar:
Pela primeira com atraso de dois meses $1{,}10^2 \times 132 = 159{,}72$; pela segunda $1{,}10 \times 132 = 145{,}20$.
Logo um total de 145,20+159,72+132,00 =436,92

RESPOSTA: R$436,92.

QUESTÃO 02
Uma pesquisa em um segmento populacional registrou o número de filhos por mulher. Em uma comunidade, à época da pesquisa, foram consultadas 1 200 mulheres, revelando uma distribuição conforme mostra o gráfico abaixo.

Distribuição de filhos por mulher



Observe que o gráfico informa o número de filhos por mulher e a porcentagem correspondente de mulheres com esse número de filhos, exceto na faixa correspondente a 5 filhos.
Com essas informações,
1. **DETERMINE** o número de mulheres entrevistadas com 5 filhos.
2. **CALCULE** a média de filhos por mulher.
3. **CALCULE** a probabilidade de uma mulher, escolhida ao acaso, ter 3 filhos ou mais.

RESOLUÇÃO:

1. 100% - (7 + 20 + 30 + 20 + 15)% = 8%.
Logo o número de mulheres entrevistadas com 5 filhos foi 0,08 $\times$ 1200 = 96

RESPOSTA: 96 mulheres.

2. A média de filhos por mulher será a razão entre o número total de filhos e o número total de mulheres:

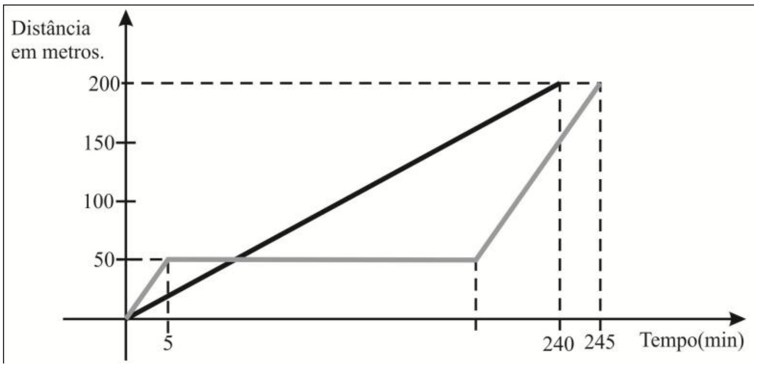
$$\frac{1200\times(1\times0{,}20+0\times0{,}07+5\times0{,}08+4\times0{,}15+3\times0{,}20+2\times0{,}30)}{1200}=0{,}20+0{,}40+0{,}60+0{,}60+0{,}60=2{,}40$$

RESPOSTA: 2,40.

3. A probabilidade de uma mulher, escolhida ao acaso, ter 3 filhos ou mais será a soma do percentual de mulheres com 3 filhos, ao de mulheres com 4 filhos e ao de mulheres com 5 filhos: 0,20+ 0,15 + 0,08 = 0,43.

RESPOSTA: 43%.

QUESTÃO 03
A fábula da lebre e da tartaruga, do escritor grego Esopo, foi recontada utilizando-se o gráfico abaixo para descrever os deslocamentos dos animais.



Suponha que na fábula a lebre e a tartaruga apostam uma corrida em uma pista de 200 metros de comprimento. As duas partem do mesmo local no mesmo instante. a tartaruga anda sempre com velocidade constante. a lebre corre por 5 minutos, para, deita e dorme por certo tempo. Quando desperta, volta a correr com a mesma velocidade constante de antes, mas, quando completa o percurso, percebe que chegou 5 minutos depois da tartaruga.
Considerando essas informações,
1. **DETERMINE** a velocidade média da tartaruga durante esse percurso, em metros por hora.
2. **DETERMINE** após quanto tempo da largada a tartaruga alcançou a lebre.
3. **DETERMINE** por quanto tempo a lebre ficou dormindo.

RESOLUÇÃO:

1. Como a tartaruga se desloca a uma velocidade constante, a sua velocidade média é de
$$\frac{200\text{m}}{4\text{h}} = 50\text{m/h}$$

RESPOSTA: 50m/h.

2. A equação que determina a quantidade de metros percorrida pela tartaruga em função do tempo é f(t) = $\frac{200}{240}t \Rightarrow f(t) = \frac{5}{6}t$.
Pelo gráfico a tartaruga alcança a lebre quando atinge 50m do seu percurso.
Se f(t) = 50 ⇒ $\frac{5}{6}t = 50 \Rightarrow t = 60\text{min} = 1\text{h}$.

RESPOSTA: 1 hora.

3. Pelo gráfico vê-se que a lebre percorreu 50 m em 5min, logo a uma velocidade média de 10m/min, por isso, deveria ter percorrido os 200m em 20 min, mas fez o percurso em 245 minutos, logo dormiu durante 245 – 20 = 225 min

RESPOSTA: 225 min ou 3h45min.

QUESTÃO 04
Um quadrado *Q* tem área igual à área de *n* quadrados de área unitária de 1 cm^2 , mais a área de um quadrado *K* .
Considerando essas informações, responda às questões abaixo em seus contextos.
1. Suponha que *n* = 19 e que a área do quadrado *Q* é de 100 cm^2 .
CALCULE a medida do lado do quadrado *K* .
2. Suponha que o lado do quadrado *K* mede 8 cm e que *n* = 57.
CALCULE a medida do lado do quadrado *Q* .

RESOLUÇÃO:

1. Sendo a, a medida do lado do quadrado K, a área do quadrado Q pode ser representada por $(n + a^2)cm^2$

Sendo n = 19 e a área do quadrado Q igual a 100 cm^2, tem-se : $19 + a^2 = 100 \Rightarrow a = \sqrt{81} = 9$

RESPOSTA: O lado do quadrado K mede 9cm.

2. Se o lado do quadrado K mede 8 cm e n = 57: $S_Q = 57 + 64 = 121cm^2 \Rightarrow L_Q^2 = 121cm^2 \Rightarrow$ o lado de Q mede 11cm.

RESPOSTA: 11cm.

QUESTÃO 05

Permutando-se os algarismos do número 123456 , formam-se números de seis algarismos. Supondo-se que todos os números formados com esses seis algarismos tenham sido colocados numa lista em ordem crescente,

1. **DETERMINE** quantos números possui essa lista.
2. **DETERMINE** a posição do primeiro número que começa com o algarismo 4.
3. **DETERMINE** a posição do primeiro número que termina com o algarismo 2.

RESOLUÇÃO:

1. A lista possui $P_6 = 6! = 720$ números.

RESPOSTA: 720.

2.

Começando por	dm	um	c	d	u	Número
1						5! = 120
2						5! = 120
3						5! = 120
TOTAL DE NÚMEROS COMEÇADOS POR 1, 2 OU 3						360

A posição do primeiro número que começa por 4 é a 361ª.

RESPOSTA: 361ª.

3.

	cm	dm	um	c	d	u	
Números começados por	1	2	**-**	**-**	**-**	**-**	4! = 24
Números começados por	1	3	**2**	**-**	**-**	**-**	3! = 6
Números começados por	1	3	**4**	**2**	**-**	**-**	2! = 2
	1	3	**4**	**5**	**2**	**6**	1
1º número que terminado por 2	1	3	**4**	**5**	**6**	**2**	1

Total de números 34.

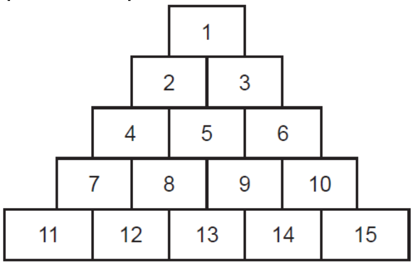
A posição do primeiro número que termina por 2 é a 34ª.

RESPOSTA: 34ª.

QUESTÃO 06

Dentro dos bloquinhos que formam uma pirâmide foram escritos os números naturais, conforme ilustrado na figura abaixo, de forma que:

- na primeira linha da pirâmide aparece um número: 1;
- na segunda linha da pirâmide aparecem dois números: 2 e 3;
- na terceira linha da pirâmide aparecem três números: 4, 5 e 6;
- na quarta linha da pirâmide aparecem quatro números: 7, 8, 9 e 10, e assim sucessivamente.



Considerando essas informações,

1. **DETERMINE** quantos bloquinhos são necessários para construir as 10 primeiras linhas da pirâmide.
2. **DETERMINE** o último número escrito na trigésima linha da pirâmide.
3. **DETERMINE** a soma de todos os números escritos na trigésima linha da pirâmide.

RESOLUÇÃO:

1. A sequência da quantidade de bloquinhos por linha forma uma P.A. onde $a_1 = 1$, $a_2 = 2$, $a_3 = 3$, ..., $a_{10} = 10$ e $r = 1$.
Assim o número de bloquinhos necessários para construir as 10 primeiras linhas da pirâmide é

$$\frac{(a_1 + a_{10}) \times 10}{2} = \frac{(1+10) \times 10}{2} = 55$$

RESPOSTA: 55.

2. O número de bloquinhos na trigésima linha é 30, então o número de bloquinhos necessários para construir as 30 primeiras linhas da pirâmide é $\frac{(1+30)\times 30}{2} = 465$, logo o último número é 465.

RESPOSTA: 465.

3. Se o último número da 30ª é o 465, o primeiro é 465 – 30 + 1 = 436.
A soma de todos os números da 30ª linha é: $\frac{(436+465)\times 30}{2} = 13515$

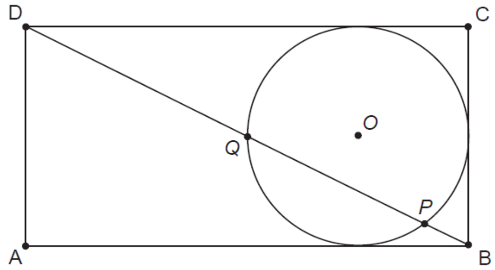
RESPOSTA: 13515.

PROVA DE MATEMÁTICA "B" - 2ª Etapa 3º DIA

QUESTÃO 01

Nos séculos XVII e XVIII, foi desenvolvida no Japão uma forma particular de produzir matemática.

Um dos hábitos que a população adotou foi o de afixar em templos placas contendo problemas, em geral de geometria. Essas placas, conhecidas como *sangaku*, apresentavam o problema com ilustrações e a resposta, sem registrar a solução dos autores. O seguinte problema foi adaptado de um desses *sangakus*: considere ABCD um retângulo com AB=160 e AD = 80 ; tome uma circunferência de centro O tangente aos lados AB, BC e CD do retângulo, e seja BD uma de suas diagonais, interceptando a circunferência nos pontos *P* e *Q*.

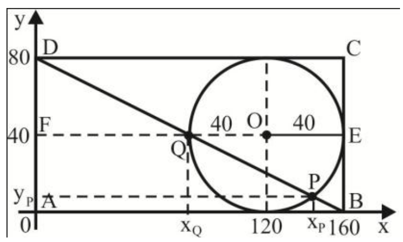


Considerando essas informações,

1. **DETERMINE** o raio *QO* da circunferência.
2. **DETERMINE** o comprimento do segmento *PQ*.

RESOLUÇÃO:

1. Associando à figura sistema um de coordenadas cartesianas cuja origem coincide com o vértice A do retângulo ABCD, percebe-se que o centro da circunferência é o ponto O(120, 40), que seu raio é 40.



RESPOSTA: 40.

2. $\overline{EF} // \overline{AB}$ tem como extremidade o ponto médio do lado $\overline{BC}$, logo Q é o ponto médio da diagonal $\overline{BD}$ e x_q é abscissa do ponto médio de $\overline{AB}$, assim x_q =80.Tem-se Q = (80, 40).

A equação da circunferência é $(x – 120)^2 + (y – 40)^2 = 1600$.

A equação da reta que contém a diagonal $\overline{BD}$ é: $y = -\frac{1}{2}x + 80$

Para determinar as coordenadas do ponto P resolve-se o sistema abaixo;

$$\begin{cases} y = -\frac{1}{2}x + 80 \\ (x-120)^2 + (y-40)^2 = 1600 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x^2 - 240x + 14400 + \left(-\frac{1}{2}x + 40\right)^2 = 1600 \\ x^2 - 240x + 14400 + \frac{x^2}{4} - 40x = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 5x^2 - 1120x + 57600 = 0 \\ x^2 - 224x + 11520 = 0 \end{cases} \Rightarrow$$

$$x = \frac{224 \pm \sqrt{4096}}{2} \Rightarrow x = \frac{224 \pm 64}{2} \Rightarrow x_Q = 80 \text{ ou } x_P = 144 \Rightarrow y_P = 8 \Rightarrow P(144, 8).$$

Sendo Q = (80, 40) e P = (144, 8), PQ = $\sqrt{64^2 + 32^2} = \sqrt{5120} = 32\sqrt{5}$

RESPOSTA: $32\sqrt{5}$ **.**

QUESTÃO 02
O lucro bruto de uma empresa é a diferença entre a receita obtida com as vendas e o custo de produção. Um determinado fabricante de cerveja só vende latas cilíndricas de alumínio, fechadas, cheias de cerveja, com 12 cm de altura e 3 cm de raio. O custo da produção de certo número de latas cheias de cerveja é de 1 real por litro de cerveja e mais *p* reais por metro quadrado de alumínio utilizado na fabricação das latas. a receita da empresa por cada litro de cerveja vendido é de dois reais por litro.
Considerando estas informações,
1. **DETERMINE** a receita gerada pela venda de cada lata de cerveja .
2. DETERMINE o custo total de produção de cada lata de cerveja em função de *p.*
3. **DETERMINE** o valor máximo do preço *p* do alumínio para que o fabricante não tenha prejuízo.

RESOLUÇÃO:
Considerando π = 3,14
L = R – C
Volume de cada lata, considerando π = 3,14: $V = 3^2 \times 3,14 \times 12 = 339,12\text{cm}^3 \Rightarrow$ a capacidade de cada lata é de 339,12mℓ = 0,33912 ℓ .
A área total de cada lata é $2 \times 3^2 \times 3,14 + 2 \times 3 \times 3,14 \times 12 = 56,52 + 226,08 = 282,6\ \text{cm}^2 =$
$= 0,02826\text{m}^2$.
1. A receita gerada pela venda de cada lata de cerveja é $2 \times 0,33912 = 0,67824$

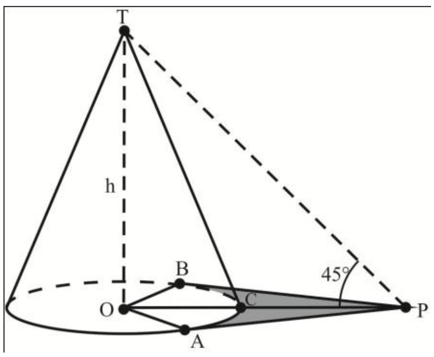
RESPOSTA: Aproximadamente R$0,68.

2. Custo da fabricação de uma lata de cerveja em reais: 0,33912 + 0,02826p
RESPOSTA: (0,33912 + 0,02826p) reais.

3. $0,67824 - (0,33912 + 0,02826p) \geq 0 \Rightarrow 0,02826p \leq 0,33912 \Rightarrow \text{p} \leq 12$

RESPOSTA: R$12,00.

QUESTÃO 03
Um cone circular reto de raio *r* = $\sqrt{3}$ e altura *h* = $2\sqrt{3}$ é iluminado pelo sol a um ângulo de 45°, como ilustrado a seguir.



A sombra projetada pelo cone é delimitada pelos segmentos *PA* e *PB* , tangentes ao círculo da base do cone nos pontos *A* e *B* , respectivamente.
Com base nessas informações,
1. **DETERMINE** a distância de *P* ao centro *O* do círculo.
2. **DETERMINE** o ângulo *AÔB*.
3. **DETERMINE** a área da sombra projetada pelo cone.

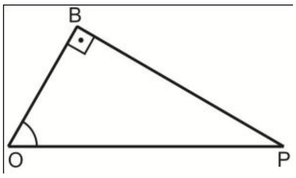
RESOLUÇÃO:

1. Como o triângulo TOP é retângulo isósceles e a altura do cone é TO = *h* = $2\sqrt{3}$, então PO = $2\sqrt{3}$

RESPOSTA: $2\sqrt{3}$.

2. O triângulo PBO é retângulo porque sendo $\overline{PB}$ tangente ao círculo da base, $\overline{PB} \perp \overline{BO}$. Sendo PO = $2\sqrt{3}$ e BO = $\sqrt{3}$

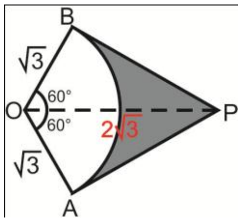
$\Rightarrow$ cos(BÔP) = $\dfrac{\sqrt{3}}{2\sqrt{3}} = \dfrac{1}{2} \Rightarrow$ BÔP = 60° $\Rightarrow$ AÔB = 120° .



RESPOSTA: 120°.

3. A área da sombra projetada é $S_{PBOA} - S_{arco\ ACB}$ =

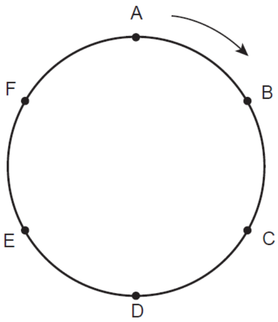
$$2\times\frac{1}{2}\times BO\times PO\times \text{sen}60° - \frac{\pi(\sqrt{3})^2}{3} = \sqrt{3}\times 2\sqrt{3}\times\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{3\pi}{3} = 3\sqrt{3} - \pi$$



RESPOSTA: $3\sqrt{3} - \pi$.

QUESTÃO 04

Sobre uma pista circular de ciclismo existem 6 pontos de observação igualmente espaçados, indicados com as letras A, B, C, D, E e F. Dada a largada de uma corrida, dois ciclistas partem do ponto A e percorrem a pista no sentido da seta, como indicado na figura abaixo. Um deles completa uma volta a cada 5 minutos, e o outro, mais lento, completa uma volta a cada 8 minutos.
As velocidades dos ciclistas são constantes.



Considerando essas informações,
1. **DETERMINE** em qual dos pontos de observação os dois ciclistas irão se encontrar pela **primeira** vez depois da largada.
2. Um cronômetro zerado é ligado no momento da largada e é desligado assim que os dois ciclistas se encontram pela **segunda** vez.
DETERMINE os minutos e segundos mostrados pelo cronômetro neste instante.
3. **DETERMINE** em qual dos pontos de observação os dois ciclistas irão se encontrar pela **oitava** vez depois da largada.

RESOLUÇÃO:

Denominando o primeiro ciclista de M e o segundo de N.

Velocidade do ciclista M: $V_M = \frac{2\pi \text{ rad}}{5\text{min}} = \frac{2\pi}{5} \text{ rad/min}$;

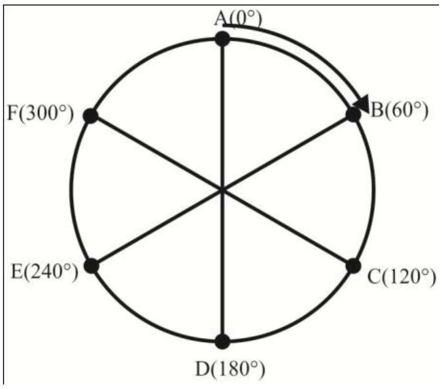
Velocidade do ciclista N: $V_N = \frac{2\pi \text{ rad}}{8\text{min}} = \frac{\pi}{4} \text{ rad/min}$.

Em t minutos o ciclista M percorre o arco $d_M = \frac{2\pi \text{ t}}{5} \text{rad}$ e neste mesmo tempo o ciclista N percorre $d_N = \frac{\pi \text{ t}}{4} \text{rad}$.

Eles se encontrarão em um mesmo ponto quando d_M e d_N forem dois arcos côngruos, isto é, quando a diferença $d_M - d_N$ for um múltiplo de 2π rad.

$$\frac{2\pi \text{ t}}{5}\text{rad} - \frac{\pi \text{ t}}{4}\text{rad} = \text{n}.2\pi \text{ rad} \Rightarrow 8\text{t} - 5\text{t} = 40\text{n} \Rightarrow 3\text{t} = 40\text{n} \Rightarrow \text{t} = \frac{40\text{n}}{3}\text{min} \Rightarrow$$

$$d_M = \frac{2\pi}{5} \times \frac{40\text{n}}{3}\text{rad} = \frac{16\pi \text{ n}}{3}\text{rad} \text{ e } \mathbf{d_N} = \frac{\pi}{4} \times \frac{40\text{n}}{3}\text{rad} = \frac{10\pi \text{ n}}{3}\text{rad}$$



1. Para n = 1 tem-se a extremidade dos arcos côngruos $\frac{16\pi \text{ n}}{3}\text{rad}$ e $\frac{10\pi \text{ n}}{3}\text{rad}$ quando os ciclistas se encontram pela primeira vez depois da largada.

Fazendo a substituição no segundo arco:

$$\frac{10\pi}{3}\text{rad} = \left(\frac{6\pi}{3} + \frac{4\pi}{3}\right)\text{rad} = \left(2\pi + \frac{4\pi}{3}\right)\text{rad} \equiv \frac{4\pi}{3}\text{rad} \cong 240°.$$

RESPOSTA: Ponto E.

2. Fazendo n = 2 em $\text{t} = \frac{40\text{n}}{3}\text{min}$ tem-se o momento depois da largada em que os dois ciclistas se encontram pela **segunda** vez: $\text{t} = \frac{80}{3}\text{min} = 26\frac{2}{3}\text{min} = 26\text{min}40\text{seg}.$

RESPOSTA: 26min 40seg.

3. Para n = 2 tem-se a extremidade dos arcos acima quando os ciclistas se encontram pela segunda vez depois da largada.

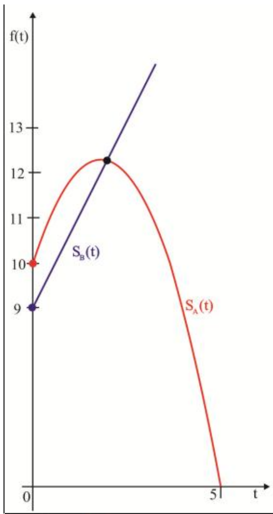
Fazendo a substituição no segundo arco:

$$\frac{20\pi}{3}\text{rad} = \left(\frac{18\pi}{3} + \frac{2\pi}{3}\right)\text{rad} = \left(6\pi + \frac{2\pi}{3}\right)\text{rad} \equiv \frac{2\pi}{3}\text{rad} \cong 120°.$$ **RESPOSTA: Ponto C.**

QUESTÃO 05
Dois robôs, A e B , trafegam sobre um plano cartesiano. Suponha que no instante t suas posições são dadas pelos pares ordenados $s_A(t) = (t, -t^2 + 3t + 10)$ e $s_B(t) = (t, 2t + 9)$, respectivamente.
Sabendo que os robôs começam a se mover em $t = 0$,
1. **DETERMINE** o instante t em que o robô A se chocará com o robô B .
2. Suponha que haja um terceiro robô C cuja posição é dada por $s_C(t) = (t, kt + 11)$, em que k é um número real positivo.
DETERMINE o maior valor de k para que a trajetória do robô C intercepte a trajetória do robô A

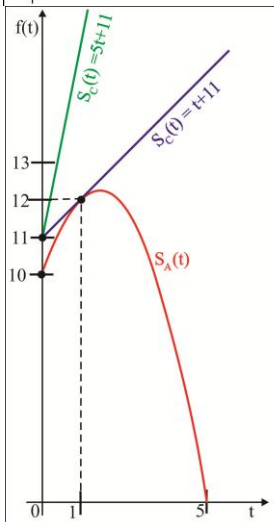
RESOLUÇÃO:

1. $-t^2 + 3t + 10 = 2t + 9 \Rightarrow t^2 - t - 1 = 0 \Rightarrow t = \dfrac{1 \pm \sqrt{1+4}}{2} \Rightarrow t = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$.



RESPOSTA: $\mathbf{t = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}\,m}$ **.**

2. $-t^2 + 3t + 10 = kt + 11 \Rightarrow t^2 + (k-3)t + 1 = 0 \Rightarrow \Delta = k^2 - 6k + 5$.
Para $\Delta \geq 0$ os gráficos de $S_A(t)$ e $S_C(t)$ se interceptarão:
$k^2 - 6k + 5 \geq 0 \Rightarrow k \in]-\infty, 1] \cup [5, +\infty[$
RESPOSTA: 1.



QUESTÃO 06

Considere o seguinte sistema linear nas incógnitas *x* e *y* $\begin{cases} 2x + 3y = 2 \\ 6x + ay = 3 \end{cases}$

Observando-se que o coeficiente de *y* na segunda equação é um parâmetro *a*,
1. **DETERMINE** para quais valores de *a* o sistema tem solução.
2. **DETERMINE** as soluções *x* e *y* em função do parâmetro *a*, caso o sistema tenha solução.
3. **DETERMINE** todos os valores de *a* para os quais o sistema tenha como solução números **inteiros** *x* e *y*.

RESOLUÇÃO:

1. O sistema terá solução para $\Delta = \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 6 & a \end{vmatrix} \neq 0 \Rightarrow 2a - 18 \neq 0 \Rightarrow a \neq 9$

RESPOSTA: O sistema tem solução para todo $a \neq 9$, com a $\in$ R.

2. $\Delta x = \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 3 & a \end{vmatrix} \Rightarrow \Delta x = 2a - 9$. $\Delta y = \begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 6 & 3 \end{vmatrix} \Rightarrow \Delta y = 6 - 12 = -6$.

$x = \frac{\Delta x}{\Delta} = \frac{2a - 9}{2a - 18}$ e $y = \frac{\Delta y}{\Delta} = \frac{-6}{2a - 18} = \frac{3}{9 - a}$

RESPOSTA: $x = \frac{2a - 9}{2a - 18}$ e $y = \frac{3}{9 - a}$.

3. Tomando a primeira equação do sistema: 2x + 3y = 2 $\Rightarrow$ x = $1 - \frac{3y}{2}$ e como x e y devem ser inteiros, y deve ser um número par. Considerando um número n, inteiro e não nulo, y = 2n $\Rightarrow$

$y = \frac{3}{9 - a} \Rightarrow 2n = \frac{3}{9 - a} \Rightarrow 18n - 2an = 3 \Rightarrow 2an = 18n - 3 \Rightarrow a = \frac{18n - 3}{2n}$.

RESPOSTA: $a = \frac{18n - 3}{2n}$, com $n \in Z^*$.