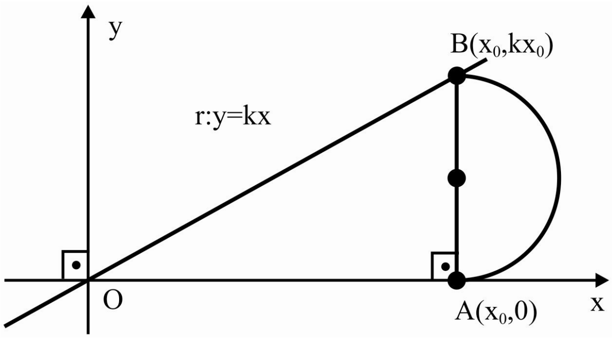
PROVA DE MATEMÁTICA DA UNIFESP VESTIBULAR– 2010 RESOLUÇÃO: Profa. Maria Antônia Gouveia.

16) Considere, num sistema ortogonal, conforme a figura, a reta de equação r:y = kx (k > 0 um número real), os pontos $A(x_0 , 0)$ e $B(x_0, kx_0)$ (com $x_0 > 0$) e o semicírculo de diâmetro AB.



a) Calcule a razão entre a área S, do semicírculo, e a área T, do triângulo OAB, sendo O a origem do sistema de coordenadas.
b) Calcule, se existir, o valor de k que acarrete a igualdade S = T, para todo $x_0 > 0$.

RESOLUÇÃO:

a) O raio do semicírculo mede $\frac{kx_0}{2}$ então sua área $S = \frac{1}{2} \times \left(\frac{kx_0}{2}\right)^2 \pi = \frac{k^2 x_0^{\ 2}}{8}\pi$.

A área do triângulo OAB é igual a $T = \frac{x_0 . kx_0}{2} = \frac{x_0^{\ 2}.k}{2}$.

A razão entre S e T è: $\frac{S}{T} = \frac{k^2 x_0^{\ 2}}{8}\pi \div \frac{x_0 k}{2} = \frac{k^2 x_0^{\ 2}}{8}\pi \times \frac{2}{x_0 k} = \frac{kx_0\pi}{4}$.

RESPOSTA: A razão entre as áreas é $\mathbf{\frac{kx_0\pi}{4}}$.

b) $\frac{k^2 x_0^{\ 2}}{8}\pi = \frac{x_0^{\ 2}.k}{2} \Rightarrow \frac{k}{4}\pi = 1 \Rightarrow k = \frac{4}{\pi}$.

RESPOSTA: $k = \frac{4}{\pi}$.

17) Uma função f : R → R diz-se par quando f(−x) = f(x), para todo x $\in$ R, e ímpar quando f(−x) = − f(x), para todo x $\in$ R.

a) Quais, dentre os gráficos exibidos, melhor representam funções pares ou funções ímpares? Justifique sua resposta.

gráfico I

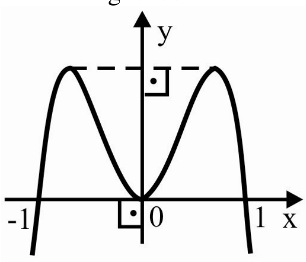


gráfico II

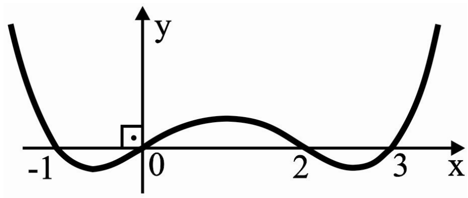


gráfico III

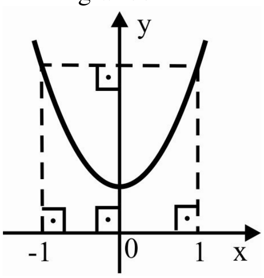


gráfico IV

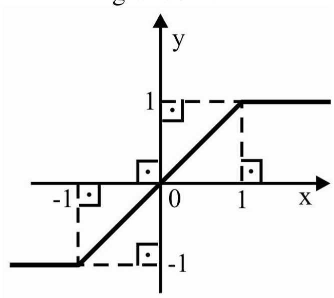
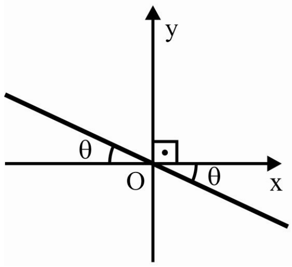


gráfico V



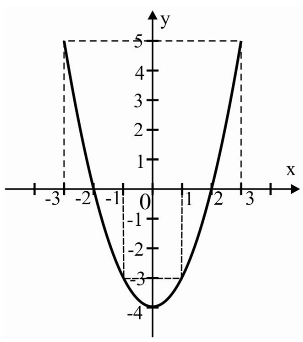
b) Dê dois exemplos de funções, y = f(x) e y = g(x), sendo uma par e outra ímpar, e exiba os seus gráficos.

RESOLUÇÃO:

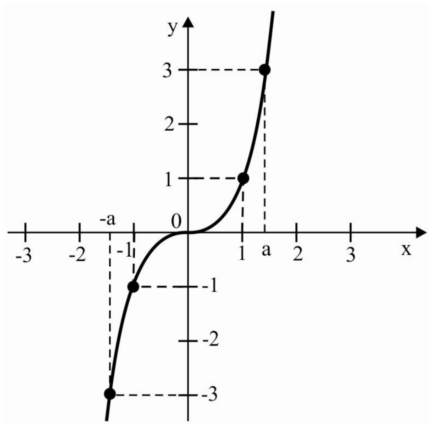
a) O gráfico de uma função par tem como eixo de simetria o eixo Oy, isto é, f(−x) = f(x)), para todo x $\in$ R. E dos gráficos apresentados acima os que satisfazem a essa condição são os de número I e III.
O gráfico de uma função ímpar é simétrico em relação à origem dos eixos cartesianos, isto é, f(−x) = − f(x), para todo x $\in$ R. E dos gráficos apresentados acima os que satisfazem a essa condição são os de número IV e V.

RESPOSTA: Função par: os gráficos I e III; função ímpar: os gráficos IV e V.

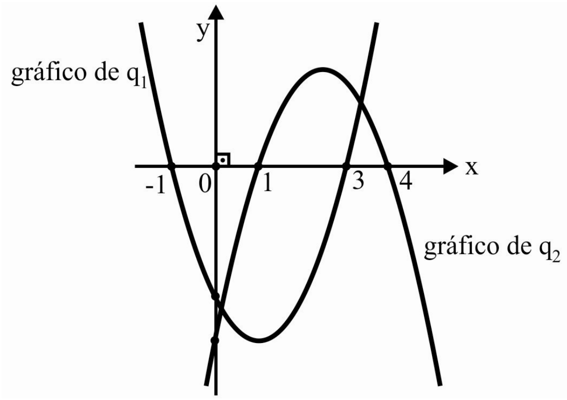
b)
Exemplo de função par: $y = x^2 - 4$



Exemplo de função ímpar: $y = x^3$.



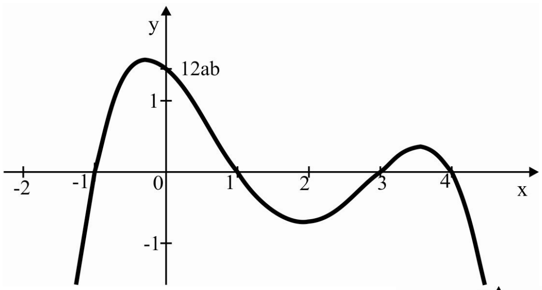
18) Considere as funções quadráticas $q_1(x)$ e $q_2(x)$ cujos gráficos são exibidos na figura.



a) Faça o esboço de um possível gráfico da função produto $q(x) = q_1(x)q_2(x)$.
b) Calcule o quociente do polinômio $h(x) = xq(x)$ pelo polinômio $k(x) = x+1$ e exiba suas raízes.

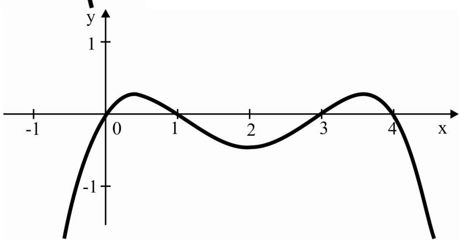
RESOLUÇÃO:
a) Como as raízes de $q_1(x)$ são iguais a -1 e 3, então $q_1(x) = a(x + 1)(x - 3)$, com $a > 0$.

Como as raízes de $q_2(x)$ são iguais a 1 e 4, então $q_2(x) = b(x - 1)(x - 4)$, com $b < 0$.
Sendo $q(x) = q_1(x)q_2(x)$, $q_1(x)q_2(x) = ab(x + 1)(x - 3)(x - 1)(x - 4)$, com $ab < 0$. Suas raízes são -1, 3, 1 e 4 e seu gráfico intercepta o eixo dos y no ponto $(0, 12ab)$ onde $12ab > 0$.
Um dos seus possíveis gráficos é:



b) Se $h(x) = xq(x)$, $h(x) = x\,ab(x + 1)(x - 3)(x - 1)(x - 4)$.

$$\frac{h(x)}{k(x)} = \frac{xab(x+1)(x-3)(x-1)(x-4)}{x+1} = xab(x-3)(x-1)(x-4)$$



As raízes de $\frac{h(x)}{k(x)} = xab(x-3)(x-1)(x-4)$ são: 0, 1, 3 e 4.

19) Um jovem possui dois despertadores. Um deles funciona em 80% das vezes em que é colocado para despertar e o outro em 70% das vezes. Tendo um compromisso para daqui a alguns dias e preocupado com a hora, o jovem pretende colocar os dois relógios para despertar.

a) Qual é a probabilidade de que os dois relógios venham a despertar na hora programada?

b) Qual é a probabilidade de que nenhum dos dois relógios desperte na hora programada?

RESOLUÇÃO:

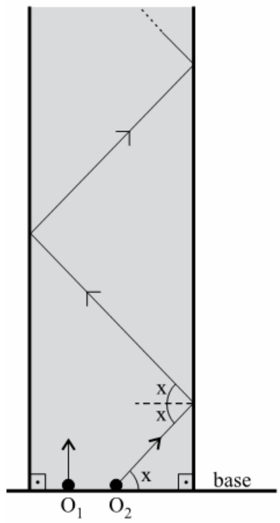
a) A probabilidade de que os dois relógios venham a despertar na hora programada é o produto das probabilidades dos dois relógios despertarem na hora programada: $0{,}80 \times 0{,}70 = 0{,}56$.

RESPOSTA: 56%.

b) A probabilidade de que os dois relógios não despertem na hora programada é o produto das probabilidades dos dois relógios não despertarem na hora programada: $0{,}20 \times 0{,}30 = 0{,}06$.

RESPOSTA: 6%.

20) Um jogo eletrônico consiste de uma pista retangular e de dois objetos virtuais, O_1 e O_2, os quais se deslocam, a partir de uma base comum, com O_1 sempre paralelamente às laterais da pista e O_2 formando um ângulo x com a base, $x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$. Considere v_1 e v_2 os módulos, respectivamente, das velocidades de O_1 e O_2. Considere, ainda, que os choques do objeto O_2 com as laterais da pista (lisas e planas) são perfeitamente elásticos e que todos os ângulos de incidência e de reflexão são iguais a x.

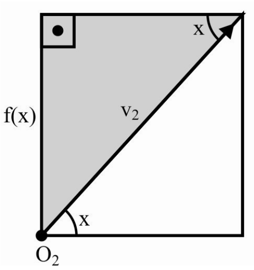


a) Exiba o gráfico da função y = f(x) que fornece o módulo da componente da velocidade de deslocamento do objeto O_2, no sentido do deslocamento do objeto O_1, em função do ângulo, $x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$.

b) Se $v_1 = 10$ m/s e $v_2 = 20$ m/s, determine todos os valores de x, $x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$, para os quais os objetos O_1 e O_2, partindo num mesmo instante, nunca se choquem.

RESOLUÇÃO:

a)

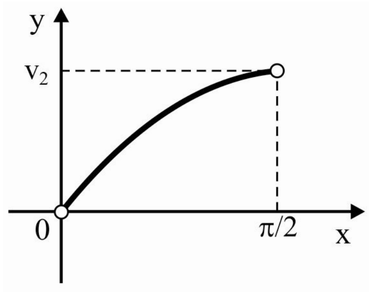


Do triângulo destacado:

$$\operatorname{sen} x = \frac{f(x)}{v_2} \Rightarrow f(x) = \operatorname{sen} x \,.v_2 \text{ com}$$

$$x \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[.$$

Gráfico de f(x)



b) Sendo $v_1 = 10$ m/s e $v_2 = 20$ m/s, os objetos O_1 e O_2 partindo no mesmo instante nunca se chocarão para $v_1 \neq \operatorname{sen} x \,.v_2 \Rightarrow 10 \neq 20 \operatorname{sen} x \Rightarrow \operatorname{sen} x \neq \frac{1}{2} \Rightarrow x \neq \frac{\pi}{6}$.

Como $x \neq \frac{\pi}{6}$ e $x \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[$, os objetos nunca se chocarão para x pertencente ao intervalo

$$\left]0, \frac{\pi}{6}\right[\cup \left]\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{2}\right[.$$

RESPOSTA: $\left]0, \frac{\pi}{6}\right[\cup \left]\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{2}\right[$.