PROVA DE MATEMÁTICA DA UFBA
VESTIBULAR– 2009 – 2ª Fase

RESOLUÇÃO: Professora Maria Antônia Gouveia.

Questão 01

Na impressão de 480 cópias de uma mesma prova, foram usadas duas impressoras, A e B, sendo que B trabalhou dez minutos a menos que A. Se os tempos em que cada impressora trabalhou fossem trocados, A e B imprimiriam 180 e 320 cópias, respectivamente. Com base nessa informação, determine o tempo gasto por cada impressora e o número de cópias que cada uma imprimiu.

RESOLUÇÃO:

	IMPRESSORA	TEMPO	Nº de cópias	PRODUÇÃO POR UNIDADE DE TEMPO (cópias/min)
Informação 1	A	t	x	x/t
	B	t – 10	480 – x	(480 – x)/(t – 10)
Informação 2	A	Se, t – 10	então, 180	180/ (t – 10)
	B	Se, t	então, 320	320/t

Comparando a produção de cada máquina nas duas informações tem-se o sistema:

$$\begin{cases} \dfrac{x}{t} = \dfrac{180}{t-10} \\ \dfrac{480-x}{t-10} = \dfrac{320}{t} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = \dfrac{180t}{t-10} \\ x = \dfrac{160t+3200}{t} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \dfrac{180t}{t-10} = \dfrac{160t+3200}{t} \\ \dfrac{9t}{t-10} = \dfrac{8t+160}{t} \end{cases} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} 8t^2 - 1600 - 80t = 9t^2 \\ t^2 + 80t + 1600 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} t = \dfrac{-80 \pm \sqrt{6400-6400}}{2} \\ t = \dfrac{80}{2} = 40 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = \dfrac{180t}{t-10} \\ x = \dfrac{7200}{40-10} = 240 \end{cases}.$$

RESPOSTA: A impressora A em 40 minutos imprimiu 240 cópias e a impressora B em 30 minutos também imprimiu 240 cópias.

Questão 02

Considere $f(x) = \log_2 x$, g(x) e h(x) funções reais tais que, no sistema de coordenadas cartesianas,

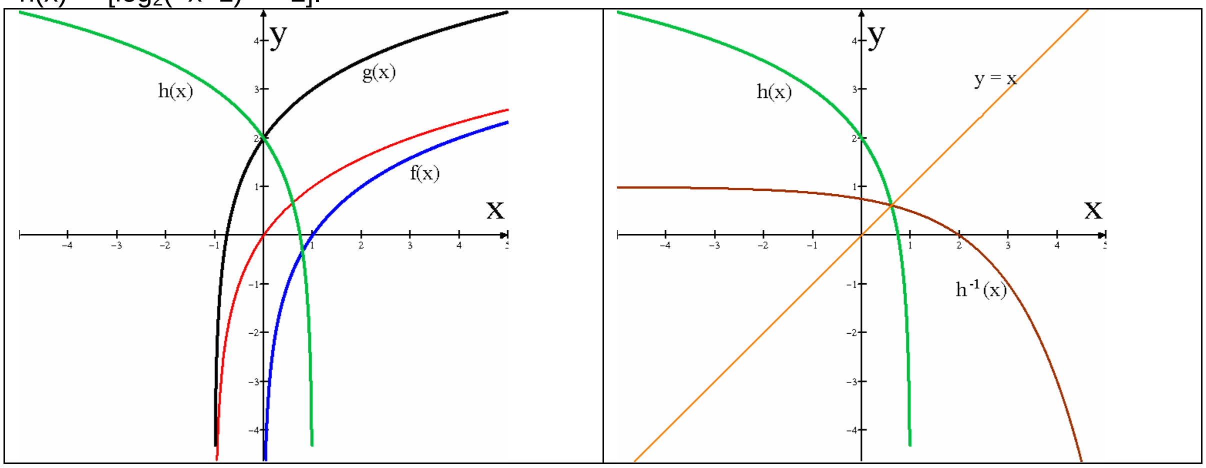
- o gráfico de g é obtido do gráfico de f através de uma translação de uma unidade, na direção do eixo Ox, para a esquerda, seguida de uma translação de duas unidades, na direção do eixo Oy, para cima;
- o gráfico de h é simétrico ao gráfico de g em relação ao eixo Oy.

Com base nessas informações, determine os valores de x que satisfazem a inequação

$h^{-1}(x) > \frac{1}{2}$.

RESOLUÇÃO:

Se o gráfico de g(x) é obtido a partir do gráfico de $f(x) = \log_2 x$ através de uma translação de uma unidade, na direção do eixo Ox, para a esquerda, seguida de uma translação de duas unidades, na direção do eixo Oy, para cima, então $g(x) = \log_2(x+1) + 2$.
Se o gráfico de h(x) é simétrico ao gráfico de g(x) em relação ao eixo Oy, então
$h(x) = [\log_2(-x+1) + 2]$.



Sendo $h(x) = y = \log_2(-x+1) + 2$, então a equação de $h^{-1}(x)$ será obtida a partir da de h(x), trocando-se x por y:
$x = \log_2(-y+1) + 2 \Rightarrow \log_2(-y+1) = x - 2 \Rightarrow -y + 1 = 2^{x-2} \Rightarrow y = 1 - 2^{(x-2)} \Rightarrow$
$h^{-1}(x) = 1 - 2^{(x-2)}$.

A inequação $h^{-1}(x) > \frac{1}{2}$ fica assim : $1 - 2^{(x-2)} > \frac{1}{2}$. Resolvendo essa inequação:

$2^{(x-2)} < \frac{1}{2} \Rightarrow 2^{(x-2)} < 2^{-1} \Rightarrow x - 2 < -1 \Rightarrow x < 1$.

RESPOSTA: S = {$x \in R$ / $x < 1$} .

Questão 03

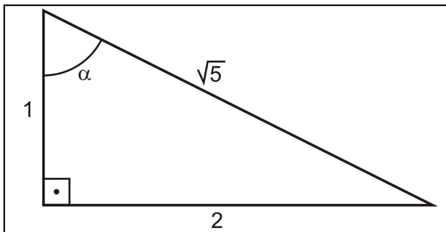
Considere a função real $f(x) = A + B\cos(mx + \alpha)$, com $\alpha \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[$ e com A e B constantes.

Sabendo-se que o período de f é igual a π, $f(0) = 2$, $f\left(\frac{\pi}{4}\right) = -1$ e $\text{tg}\alpha = 2$, calcule $f\left(\frac{\alpha}{2}\right)$.

RESOLUÇÃO:

Sendo o período de f é igual a π, tem-se: $m\pi = 2\pi \Rightarrow m = 2 \Rightarrow f(x) = A + B\cos(2x + \alpha)$.

Sendo $\alpha \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[$ e $\text{tg}\alpha = 2$, então podemos considerar o triângulo retângulo:

	Aplicando o conhecimento de razões trigonométricas ao triângulo retângulo ao lado, $\text{sen}\alpha = \frac{2}{\sqrt{5}}$ e $\cos\alpha = \frac{1}{\sqrt{5}}$

Sendo $f(0) = 2$, $f\left(\frac{\pi}{4}\right) = -1 \Rightarrow \begin{cases} A + B\cos\alpha = 2 \\ A + B\cos\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right) = -1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A + \frac{B}{\sqrt{5}} = 2 \\ A - B\,\text{sen}\alpha = -1 \end{cases} \Rightarrow$

$$\begin{cases} A + \frac{B}{\sqrt{5}} = 2 \\ A - \frac{2B}{\sqrt{5}} = -1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \frac{3B}{\sqrt{5}} = 3 \\ B = \sqrt{5} \Rightarrow f(x) = 1 + \sqrt{5}\cos(2x + \alpha) . \\ A = 1 \end{cases}$$

$$f\left(\frac{\alpha}{2}\right) = 1 + \sqrt{5}\cos(\alpha + \alpha) = 1 + \sqrt{5}\cos 2\alpha = 1 + \sqrt{5}(\cos^2\alpha - \text{sen}^2\alpha) \Rightarrow$$

$$f\left(\frac{\alpha}{2}\right) = 1 + \sqrt{5}\left(\frac{1}{5} - \frac{4}{5}\right) = 1 - \frac{3\sqrt{5}}{5} .$$

RESPOSTA: $f\left(\frac{\alpha}{2}\right) = 1 - \frac{3\sqrt{5}}{5}$

Questão 04

Determine os valores de k para que o sistema de equações $\begin{cases} 2x + 2y - 2z = 2 \\ 3x + 4y + (k-1)z = 4 \\ x + ky + 3z = 2 \end{cases}$ **seja**

•possível e determinado.

•possível e indeterminado.

•impossível.

RESOLUÇÃO:

Dividindo os termos da primeira equação por 2 e a seguir escrevendo a matriz completa do sistema:

$$\begin{cases} 2x + 2y - 2z = 2 \\ 3x + 4y + (k-1)z = 4 \\ x + ky + 3z = 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x + y - z = 1 \\ 3x + 4y + (k-1)z = 4 \\ x + ky + 3z = 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 3 & 4 & k-1 & 4 \\ 1 & k & 3 & 2 \end{pmatrix}:$$

Na matriz acima, substituindo L_2 por $L_2 - 3L_1$ e L_3 por $L_3 - L_1$:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & k+2 & 1 \\ 0 & k-1 & 4 & 1 \end{pmatrix}.$$

Substituindo L_3 por $L_3 - (k-1)L_2$:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & k+2 & 1 \\ 0 & 0 & 4-(k-1)(k+2) & 1-(k-1) \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & k+2 & 1 \\ 0 & 0 & -k^2-k+6 & 2-k \end{pmatrix}.$$

Então temos a equivalência seguinte:

$$\begin{cases} 2x + 2y - 2z = 2 \\ 3x + 4y + (k-1)z = 4 \\ x + ky + 3z = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x + y - z = 1 \\ \quad y + (2+k)z = 1 \\ \quad [-k^2 - k + 6]z = 2 - k \end{cases}$$

Para o sistema ser possível e determinado:

$k^2 + k - 6 \neq 0 \Rightarrow k \neq \dfrac{-1 \pm \sqrt{25}}{2} \Rightarrow k \neq 2 \text{ e } k \neq -3$

- Então para $k \neq 2$ e $k \neq -3$ o sistema é possível e determinado.

Para o sistema ser possível e indeterminado deve-se ter:
$k^2 + k - 6 = 0$ e $2 - k = 0 \Rightarrow (k = 2 \text{ ou } k = -3)$ e $k = 2 \Rightarrow$ **k = 2**.

- O sistema será possível e indeterminado se **k = 2**.

Na igualdade $[-k^2 - k + 6]z = 2 - k$, substituindo k por –3:

(–9 + 3 + 6)z = 2 + 3 $\Rightarrow$ 0 = 5 (proposição falsa)

- O sistema será impossível para k = **–3**.

OUTRO MODO DE DESENVOLVER ESTA RESOLUÇÃO:

$\begin{cases} 2x + 2y - 2z = 2 \\ 3x + 4y + (k-1)z = 4 \\ x + ky + 3z = 2 \end{cases}$ **(Dividindo-se os termos da 1ª equação por 2):**

$\begin{cases} x + y - z = 1 \\ 3x + 4y + (k-1)z = 4 \\ x + ky + 3z = 2 \end{cases}$ **(Calculando o determinante da matriz principal):**

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 3 & 4 & k-1 \\ 1 & k & 3 \end{vmatrix} = 12 - 3k + k - 1 + 4 - k(k-1) - 9 \Rightarrow \Delta = -\mathbf{k^2} - \mathbf{k} + \mathbf{6}.$$

- Fazendo $\Delta \neq 0$ o sistema será possível e determinado.

  $-k^2 - k + 6 \neq 0 \Rightarrow k^2 + k - 6 \neq 0 \Rightarrow k \neq \dfrac{-1 \pm \sqrt{25}}{2} \Rightarrow k \neq -3 \;\; e \;\; k \neq 2 \Rightarrow$

- **O sistema será possível e determinado para k $\in$ R – {–3, 2}**.

Substituindo k por 2 e escalonando a matriz completa:

$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 3 & 4 & 1 & 4 \\ 1 & 2 & 3 & 2 \end{pmatrix}$ **(Substituindo a L_2 por $L_2 - 3L_1$ e a L_3 por $L_3 - L_1$):**

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 4 & 1 \\ 0 & 1 & 4 & 1 \end{pmatrix} \textbf{(Substituindo a } \mathbf{L_3} \textbf{ por } \mathbf{L_3 - L_1}\textbf{):} \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

- **Sendo nula a terceira linha isso indica que para k = 2, o sistema tem para solução: $(5z, 1-4z, z) \Rightarrow$ o sistema será possível e indeterminado.**

Substituindo k por – 3 e escalonando a matriz completa:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 3 & 4 & -4 & 4 \\ 1 & -3 & 3 & 2 \end{pmatrix} \textbf{(Substituindo a } \mathbf{L_2} \textbf{ por } \mathbf{L_2 - 3L_1} \textbf{ e a } \mathbf{L_3} \textbf{ por } \mathbf{L_3 - L_1}\textbf{):}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & -4 & 4 & 1 \end{pmatrix} \textbf{(Substituindo a } \mathbf{L_3} \textbf{ por } \mathbf{L_3 + 4L_1}\textbf{):} \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}.$$

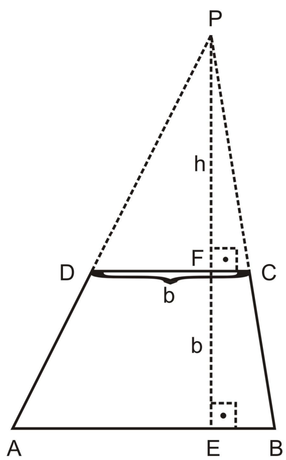
Analisando a terceira linha da matriz resultante percebe-se que a sua conclusão 0 = 5 é uma proposição falsa.

- **Assim para k = – 3, o sistema é impossível.**

Questão 05

Considere um trapézio ABCD em que a altura e a base menor CD medem b e seja P o ponto de intersecção dos prolongamentos dos lados não paralelos AD e BC. Sendo h a medida da altura do triângulo DCP, relativa à base CD, e $\frac{b}{h} = \frac{2}{3}$, determine a razão entre as áreas do triângulo ABP e do trapézio ABCD.

RESOLUÇÃO:



A partir da relação $\frac{b}{h} = \frac{2}{3}$ pode-se afirmar que os números b e h são proporcionais aos números 2 e 3, portanto pode-se considerar $b = 2x$, $h = 3x$ e $PE = b + h = 5x$.

Sendo semelhantes os triângulos DCP e ABP e

$$\frac{PE}{PF} = \frac{h+b}{h} = \frac{5x}{3x} = \frac{5}{3} \Rightarrow \frac{S_{ABP}}{S_{DCP}} = \frac{25}{9} \Rightarrow \frac{S_{ABP}}{S_{ABP} - S_{DCP}} = \frac{25}{16}.$$

RESPOSTA: A razão $\mathbf{\frac{S_{ABP}}{S_{ABCD}} = \frac{25}{16}}$

Questão 06

No sistema de coordenadas cartesianas, as curvas E e C satisfazem as seguintes propriedades:

• Para qualquer ponto Q(x, y) de E, a soma das distâncias de Q(x, y) a $F_1\left(-\sqrt{3}, 0\right)$ e de Q(x, y) a $F_2\left(\sqrt{3}, 0\right)$ é constante e igual a 4u.c.

•C é uma parábola com vértice na interseção de E com o semi-eixo positivo Oy e passa .por F_2

Com base nessas informações, determine os pontos de interseção de E e C.

RESOLUÇÃO:

• Como para qualquer ponto Q(x, y) de E, a soma das distâncias de Q(x, y) a $F_1\left(-\sqrt{3}, 0\right)$ e de Q(x, y) a $F_2\left(\sqrt{3}, 0\right)$ é constante e igual a 4u.c, então E é uma elipse de focos F_1 e F_2, cuja distância focal $2c = 2\sqrt{3}$. Sendo $QF_1 + QF_2 = 2a \Rightarrow 2a = 4 \Rightarrow a = 2$.

Sendo $a^2 = b^2 + c^2 \Rightarrow 4 = b^2 + \left(\sqrt{3}\right)^2 \Rightarrow b^2 = 1 \Rightarrow b = 1 \Rightarrow$ A equação de E é: $\frac{x^2}{4} + y^2 = 1$.

•Como o vértice da parábola C é o ponto (0,1) interseção de E com o semi-eixo positivo Oy, o seu gráfico é simétrico em relação a esse eixo, e a sua equação é da forma $y = ax^2 + 1$ e é uma função par. Logo se essa parábola passa pelo ponto $F_2\left(\sqrt{3}, 0\right)$ também passa pelo ponto $F_1\left(-\sqrt{3}, 0\right)$ e a sua equação pode ser representada da seguinte forma:

$$y = a(x-\sqrt{3})(x+\sqrt{3}) \Rightarrow a(x-\sqrt{3})(x+\sqrt{3}) = ax^2+1 \Rightarrow ax^2-3a = ax^2+1 \Rightarrow a = -\frac{1}{3}.$$

Assim a equação de C é: $y = -\frac{1}{3}x^2+1$.

Para determinar os pontos de intercessão das duas curvas deve-se resolver o sistema:

$$\begin{cases} \dfrac{x^2}{4}+y^2=1 \\ y=-\dfrac{x^2}{3}+1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x^2=3-3y \\ \dfrac{x^2}{4}+y^2=1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \dfrac{3-3y}{4}+y^2=1 \\ 4y^2-3y-1=0 \end{cases} \Rightarrow \left\{ y=\dfrac{3\pm\sqrt{25}}{8} \right. \Rightarrow \left\{ y'=-\dfrac{1}{4} \text{ ou } y''=1 \right. \Rightarrow$$

Para $y=-\frac{1}{4} \Rightarrow x^2=1-\frac{1}{16} \Rightarrow x=\pm\frac{\sqrt{15}}{4}$ e para $y=1 \Rightarrow x^2=0 \Rightarrow x=0$.

Assim os pontos de interseção das duas curvas são os pontos:

$\left(-\frac{\sqrt{15}}{4},-\frac{1}{4}\right),\left(\frac{\sqrt{15}}{4},-1\right)$ e $(1,0)$.