FUVEST 2003 - Prova de Matemática - 17/11/2002 (Versão V)

Resolução e comentário por: Professora Maria Antônia Conceição Gouveia.

QUESTÃO 77.
Num bolão, sete amigos ganharam vinte e um milhões, sessenta e três mil e quarenta e dois reais. O prêmio foi dividido em sete partes iguais. Logo, o que cada um recebeu, em reais, foi:

a) 3.009.006,00
b) 3.009.006,50
c) 3.090.006,00
d) 3.090.006,50
e) 3.900.060,50

RESOLUÇÃO:

O que cada amigo recebeu foi avaliado pelo quociente $\frac{21.063.042}{7} = 3009006$.

Alternativa a.

QUESTÃO 78.

Para que fosse feito um levantamento sobre o número de infrações de trânsito, foram escolhidos 50 motoristas. O número de infrações cometidas por esses motoristas, nos últimos cinco anos, produziu a seguinte tabela:

Nº de infrações	**Nº de motoristas**
de 1 a 3	7
de 4 a 6	10
de 7 a 9	15
de 10 a 12	13
de 13 a 15	5
maior ou igual a 16	0

Pode-se então afirmar que a média do número de infrações, por motorista, nos últimos cinco anos, para este grupo, está entre:

a) 6,9 e 9,0   b) 7,2 e 9,3   c) 7,5 e 9,6   c) 7,8 e 9,9   d) 8,1 e 10,2

RESOLUÇÃO:

Calculemos inicialmente a média aritmética do número mínimo de inflações em cada linha da tabela: $\frac{1\times 7+4\times 10+7\times 15+10\times 13+13\times 5}{7+10+15+13+5} = \frac{7+40+105+130+65}{50} = \frac{347}{50} = \frac{694}{100} = 6,94$

Agora calculemos a média aritmética do número máximo de inflações em cada linha da tabela $\frac{3\times 7+6\times 10+9\times 15+12\times 13+15\times 5}{50} = \frac{21+60+135+156+75}{50} = \frac{447}{50} = \frac{894}{100} = 8,94$

Alternativa a.

QUESTÃO 79.

Duas retas s e t do plano cartesiano se intercseptam no ponto (2,2). O produto de seus coeficientes angulares é 1 e a reta s intersepta o eixo dos y no ponto (0,3). A área do triângulo delimitado pelo eixo dos x e pelas retas s e t é :

a) 2 b) 3 c) 4 d)5 e) 6

RESOLUÇÃO:

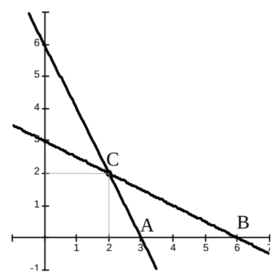
Considerando a e m, respectivamente, como os coeficientes angulares das reta s e r, que passam pelo ponto (2,2). A reta s passa também pelo ponto (0,3). Então a equação da reta s é dada por y = ax + 3.Sendo am = 1 $\Rightarrow$ m = $\frac{1}{a}$

$\begin{cases} s: y = ax + 3 \\ r: y = \frac{1}{a}x + c \end{cases}$ Como as duas retas passam pelo ponto (2,2) $\Rightarrow \begin{cases} 2a + 3 = 2 \\ \frac{2}{a} + c = 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = -\frac{1}{2} \\ -4 + c = 2 \\ c = 6 \end{cases}$

Logo, a equação da reta s é y = $-\frac{x}{2} + 3$ e a da reta r, é y = -2x + 6, que têm como raízes, respectivamente, 6 e 3.

A interseção das duas retas é o ponto (2,2).

O gráfico das duas retas é :



A questão pede a área S do triângulo ABC cujos vértices são os pontos (2,2), (6,0) e (3,0).

Assim S = $\frac{1}{2}\left\| \begin{matrix} 2 & 6 & 3 & 2 \\ 2 & 0 & 0 & 2 \end{matrix} \right\| = \frac{1}{2}|6 - 12| = 3$.

Alternativa b.

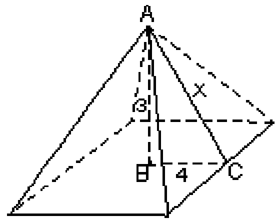
QUESTÃO 80.

Um telhado tem a forma da superfície lateral de uma pirâmide regular, de base quadrada. O lado da base mede 8m e a altura da pirâmide 3m. As telhas para cobrir esse telhado são vendidas em lotes que cobrem 1 m². Supondo que possa haver 10 lotes de telhas desperdiçadas (quebras e emendas), o número mínimo de lotes de telhas a ser comprado é:

a) 90 b) 100 c) 110 d) 120 e) 130

RESOLUÇÃO:

A superfície do telhado é a superfície lateral da pirâmide, que é formada de quatro triângulos de base 8 e altura x.



Aplicando o teorema de Pitágoras no triângulo ABC , $x^2 = 9 + 16 \Rightarrow x = 5$.

$S = 4 \times \frac{8 \times 5}{2} = 80\,m^2$. Como cada $1m^2$ é coberto com 1 lote de telhas e no total são desperdiçados 10 lotes, então o número mínimo de lotes será 90.

Alternativa a.

QUESTÃO 81.

O sistema $\begin{cases} x + (c+1)\,y = 0 \\ cx + y = -1 \end{cases}$,onde $c \neq 0$, admite uma solução (x,y) com x = 1. Então, o valor de c é

a) –3 b) –2 c) –1 d) 1 e) 2

RESOLUÇÃO:

$$\begin{cases} x + (c+1)\,y = 0 \\ cx + y = -1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 1 + (c+1)y = 0 \\ c + y = -1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = -(c+1) \\ 1 - (c+1)(c+1) = 0 \end{cases} \Rightarrow \{1 - c^2 - 2c - 1 = 0 \Rightarrow c^2 + 2c = 0$$

$\Rightarrow$ c = 0 ou c = -2.

Alternativa b.

QUESTÃO 82.

No segmento $\overline{AC}$, toma-se um ponto B da forma que $\frac{AB}{AC} = 2\frac{BC}{AB}$. Então, o valor de $\frac{BC}{AB}$ é:

a) $\frac{1}{2}$ b) $\frac{\sqrt{3}-1}{2}$ c) $\sqrt{5}-1$ d) $\frac{\sqrt{5}-1}{2}$ e) $\frac{\sqrt{5}-1}{3}$

RESOLUÇÃO:

Representemos por x e y,respectivamente, como as medidas dos segmentos de reta AB e BC. Então a medida de AC = x + y.

Pela informação da situação problema temos a relação: $\frac{x}{x+y}=\frac{2y}{x} \Rightarrow x^2 = 2xy + 2y^2$

Donde $x^2 - 2xy - 2y^2 = 0$.

Calculando o valor de x em função de y, teremos:

$$x = \frac{2y \pm \sqrt{4y^2 + 8y^2}}{2} = \frac{2y \pm 2y\sqrt{3}}{2} = y\left(1 \pm \sqrt{3}\right).$$

Como x e y são positivos, então $x = y\left(1+\sqrt{3}\right)$.

Assim fazendo as devidas substituições em $\frac{BC}{AB}$ temos:

$$\frac{y}{y\left(\sqrt{3}+1\right)} = \frac{1}{\left(\sqrt{3}+1\right)} = \frac{\left(\sqrt{3}-1\right)}{\left(\sqrt{3}+1\right)\left(\sqrt{3}-1\right)} = \frac{\left(\sqrt{3}-1\right)}{2}.$$

Alternativa b.

QUESTÃO 83:

As soluções da equação $\frac{x-a}{x+a}+\frac{x+a}{x-a}=\frac{2\left(a^4+1\right)}{a^2\left(x^2-a^2\right)}$, onde $a \neq 0$,são:

a) $\frac{-a}{2}$ e $\frac{a}{4}$ b) $\frac{-a}{4}$ e $\frac{a}{4}$ c) $\frac{-1}{2a}$ e $\frac{1}{2a}$ d) $\frac{-1}{a}$ e $\frac{1}{2a}$ e) $\frac{-1}{a}$ e $\frac{1}{a}$

RESOLUÇÃO:

O domínio desta equação é formado dos valores de x para os quais $(x+a)(x-a) \neq 0 \Rightarrow x \neq \pm a$..
Multiplicando $a^2(x^2-a^2)$, m.m.c entre os denominadores, por cada termo da equação, vem:

$a^2(x-a)^2 + a^2(x+a)^2 = 2(a^4+1) \Rightarrow 2a^2x^2+2a^4 = 2a^4 + 2 \Rightarrow x^2 = \frac{1}{a^2} \Rightarrow x = \pm\frac{1}{a}$.

Alternativa e.

QUESTÃO 84.

Seja $f(x) = \log_3(3x+4) - \log_3(2x-1)$. Os valores de x para os quais f está definida e satisfaz $f(x) > 1$, são:

a) $x < \frac{7}{3}$ b) $\frac{1}{2} < x$ c) $\frac{1}{2} < x < \frac{7}{3}$ d) $\frac{4}{3} < x$ e) $-\frac{4}{3} < x < \frac{1}{2}$

RESOLUÇÃO:
Determinemos o domínio da inequação $\log_3(3x+4) - \log_3(2x-1)$.

Fazendo 3x+4>0 e 2x –1 > 0 $\Rightarrow x > -\dfrac{4}{3}$ e $x > \dfrac{1}{2} \Rightarrow \mathbf{x > \dfrac{1}{2}}$.

Resolvendo a inequação f(x) > 1 $\Rightarrow \log_3(3x+4) - \log_3(2x-1) > 1 \Rightarrow$

$\log_3(3x+4) > \log_3(2x-1) + 1 \Rightarrow \log_3(3x+4) > \log_3 3(2x-1) \Rightarrow (3x+4) > 3(2x-1)$

$6x - 3x < 4 + 3 \Rightarrow x < \dfrac{7}{3}$.

Logo $x < \dfrac{7}{3}$ e $x > \dfrac{1}{2} \Rightarrow \mathbf{\dfrac{1}{2} < x < \dfrac{7}{3}}$.

Alternativa c.

QUESTÃO 85.
Uma ONG decidiu preparar sacolas, contendo 4 itens distintos cada, para distribuir entre a população carente. Esses 4 itens devem ser escolhidos entre 8 tipos de produtos de limpeza e 5 tipos de alimentos não perecíveis. Em cada sacola, deve haver pelo menos um item que seja alimento não perecível e pelo menos um item que seja produto de limpeza. Quantos tipos de sacolas distintas podem ser feitos?

a) 360 b) 420 c) 540 d) 600 e) 640.

RESOLUÇÃO:
Ao todo são 13 produtos com os quais serão arrumadas as sacolas. Como em cada sacolas deve haver pelo menos um item que seja alimento e pelo menos um que seja produto de limpeza, então o total de sacolas diferentes será dado por:

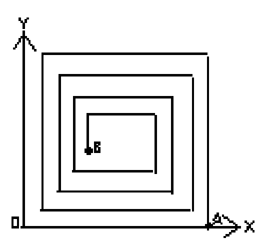
$$C_{13}^4 - C_8^4 - C_5^4 = \frac{13\times\cancel{12}\times11\times10}{\cancel{4}\times\cancel{3}\times2\times1} - \frac{8\times7\times\cancel{6}\times5}{4\times\cancel{3}\times\cancel{2}\times1} - \frac{5\times\cancel{4}\times\cancel{3}\times\cancel{2}}{\cancel{4}\times\cancel{3}\times\cancel{2}\times1} = 715 - 70 - 5 = 640.$$

Alternativa e.

QUESTÃO 86.

No plano cartesiano, os comprimentos de segmentos consecutivos da poligonal, que começa na origem 0 e termina em B (ver figura), formam uma progressão geométrica de razão p, com $0 < p < 1$. Dois segmentos consecutivos sempre perpendiculares. Então, se AO = 1, a abscissa x do ponto B = (x,y) vale:

a) $\dfrac{1-p^{12}}{1-p^4}$ b) $\dfrac{1-p^{12}}{1+p^2}$ d) $\dfrac{1-p^{16}}{1+p^2}$ e) $\dfrac{1-p^{20}}{1-p^4}$



RESOLUÇÃO:
Os comprimentos dos segmentos consecutivos da poligonal formam uma PG de razão p, $0 < p < 1$: 1, p, p^2, p^3,,...p^{15}.

A abscissa é a coordena do ponto (x,y) que nos dá **o deslocamento a partir da origem no sentido horizontal**.

Logo a abscissa do ponto A é **1**, a do 3º vértice é **1-p²**; a do 5º vértice é **1- p²+p⁴**,; a do 7º vértice é **1- p²+p⁴-p⁶**; a do 9º é **1- p²+p⁴-p⁶+p⁸**;...a do , p³,...a do 15º vértice (que é a mesma do vértice B) é **1- p²+p⁴-p⁶+p⁸ + ...+p¹⁵** .. Notemos que as abscissas a são somas dos temos de uma PG de 16 termos na qual o primeiro termo é 1 e de razão **–p²**.

Então $S = \dfrac{1\left(\left(-p^2\right)^8 - 1\right)}{-p^2 - 1} = \dfrac{p^{16} - 1}{-\left(p^2 + 1\right)} = \dfrac{1 - p^{16}}{p^2 + 1}$ **.**

Alternativa d.

QUESTÃO 87.

Seja f a função que associa, a cada número real x, o menor dos números x+3 e –x+5. Assim, o valor máximo de f(x) é:

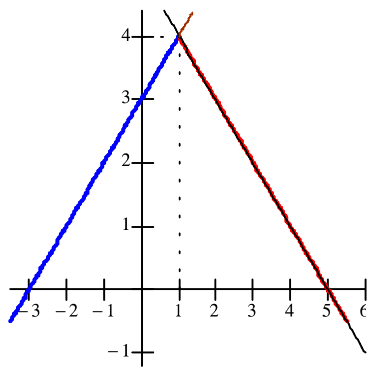
a)1 b) 2 c) 4 d) 6 e) 7

RESOLUÇÃO:

Podemos representar a função f(x) do seguinte modo

$$f(x) = \begin{cases} x+3, \text{se } x+3 \leq -x+5 \\ -x+5, \text{se } -x+5 < x+3 \end{cases} \Rightarrow f(x) = \begin{cases} x+3, \text{se } x \leq 1 \\ -x+5, \text{se } x > 1 \end{cases}$$

O gráfico da função é



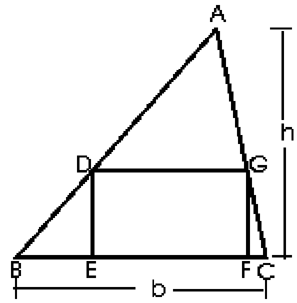
Podemos pela análise do gráfico concluir que o valor máximo da função é 4.

Alternativa c.

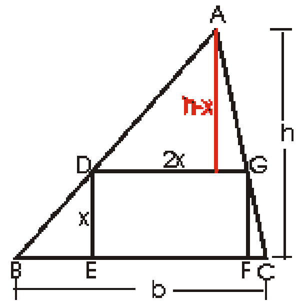
QUESTÂO 88.

O triângulo abc tem altura h e base b (ver figura). Nele, está inscrito o retângulo DEFG, cuja base é o dobro da altura, Nessas condições, a altura do retângulo, em função de h e b, é dada pela fórmula:

a) $\dfrac{bh}{h+b}$ b) $\dfrac{2bh}{h+b}$ c) $\dfrac{bh}{h+2b}$ d) $\dfrac{bh}{2h+b}$ e) $\dfrac{bh}{2(h+b)}$



RESOLUÇÃO:



Os triângulos ADG e ABC são semelhantes , então as suas linhas correspondentes são proporcionais. Logo:

$$\frac{h-x}{2x}=\frac{h}{b}\Rightarrow 2hx=bh-bx\Rightarrow 2hx+bx=bh\Rightarrow (2h+b)x=bh\Rightarrow x=\frac{bh}{2h+b}.$$

Alternativa d.