Prova de Matemática
Vestibular da FUVEST_ 2004_Fase 2.
Resolução e comentário pela Profa. Maria Antônia Conceição Gouveia.

QUESTÃO 01
O número de gols marcados nos 6 jogos da primeira rodada de um campeonato de futebol foi 5, 3, 1, 4, 0 e 2.
Na segunda rodada, serão realizados mais 5 jogos. Qual deve ser o número total de gols marcados nessa rodada para que a média de gols, nas duas rodadas, seja 20% superior à média obtida na primeira rodada?

Resolução:

Primeira rodada:
Média de gols: $\frac{5+3+1+4+0+2}{6}=\frac{15}{6}=2,5$.
Segunda rodada:

Gols marcados: x
Média de gols nas duas rodadas:
$\frac{x+15}{11}=1,2.2,5\Rightarrow\frac{x+15}{11}=33\Rightarrow x+15=33\Rightarrow x=18$.

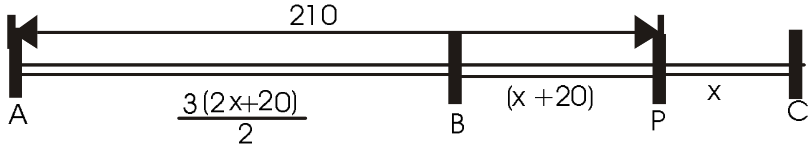
RESPOSTA: 18 gols.

QUESTÃO 02:

Três cidades A, B e C situam-se ao longo de uma estrada reta; B situa-se entre A e C e a distância de B a C é igual a dois terços da distância de A até B. Um encontro foi marcado por 3 moradores, um de cada cidade, em um ponto P da estrada, localizado entre as cidades B e C e à distância de 210km de A. Sabendo-se que P está 20km mais próximo de C do que de B, determinar a distância que o morador de B deverá percorrer até o ponto de encontro.

Resolução:

Se a distância de B a C é igual a dois terços da distância de A até B: $\frac{BC}{AB}=\frac{2}{3}\Rightarrow AB=\frac{3BC}{2}$



Analisando o gráfico representativo da situação-problema, concluímos que: $\frac{3(2x+20)}{2}+x+20=210\Rightarrow 6x+60+2x+40=420\Rightarrow 8x=320\Rightarrow x=40$.

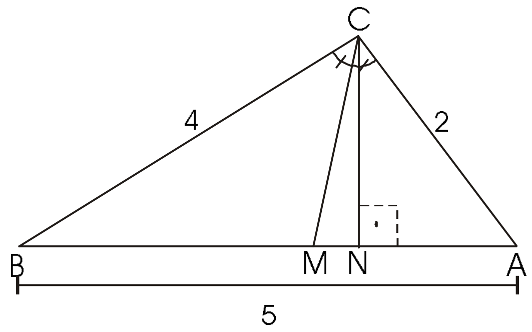
x + 20 = 40 + 20 = 60

Resposta: O morador B deverá percorrer até o ponto de encontro 60km.

QUESTÃO 03:

Um triângulo ABC tem lados de comprimentos AB = 5, BC = 4 e AC = 2. Sejam M e N os pontos de $\overline{AB}$ tais que $\overline{CM}$ é a bissetriz relativa ao ângulo $A\hat{C}B$ e $\overline{CN}$ é a altura relativa ao lado . $\overline{AB}$.
Determinar o comprimento de $\overline{MN}$.

Resolução:



Sendo $\overline{CM}$ a bissetriz interna relativa ao ângulo $A\hat{C}B$:
$\frac{4}{BM} = \frac{2}{5 - BM} \Rightarrow 2BM = 20 - 4BM \Rightarrow BM = \frac{20}{6} = \frac{10}{3}$
Sendo o ângulo $C\hat{B}A$, oposto ao menor lado do triângulo, é agudo.
Utilizando a relação métrica num triângulo qualquer, relativa a um ângulo agudo $AC^2 = BC^2 + AB^2 - 2AB.BN$ vem:
$4 = 16 + 25 - 2.5.BN \Rightarrow 10BN = 37 \Rightarrow BN = \frac{37}{10}$.
Pela figura percebemos que BN = BM + MN $\Rightarrow$
MN = BN –BM $\Rightarrow MN = \frac{37}{10} - \frac{10}{3} = \frac{111 - 100}{30} = \frac{11}{30}$.

Resposta: $MN = \frac{11}{30}$

QUESTÃO 04:

Considere a equação $z^2 = \alpha z + (\alpha-1)\bar{z}$, onde α é um número real e $\bar{z}$ indica o conjugado do número complexo z.
a) Determinar os valores de α para os quais a equação tem quatro raízes distintas.
b) Representar, no plano complexo, as raízes dessa equação quando $\alpha = 0$.

Resolução:

a) Sendo z = b + ci, com b e c reais e $z^2 = \alpha z + (\alpha-1)\bar{z}$, temos:
(I) $z^2 = b^2 - c^2 + (2bc)i$
(II) $\alpha z = \alpha b + (\alpha c)i$
(III) $(\alpha-1)(b-ci) = \alpha b - b - (\alpha c - c)i$.
Substituindo os valores I, II e III na equação $z^2 = az + (a-1)\bar{z}$,
$b^2 - c^2 + (2bc)i = \alpha b + (\alpha c)i + \alpha b - b - (\alpha c - c)i \Rightarrow$
$b^2 - c^2 + (2bc)i = 2\alpha b - b + (\alpha c - \alpha c + c)i = 2\alpha b - b + ci \Rightarrow$
$b^2 - c^2 + (2bc)i = 2\alpha b - b + ci$
$b^2 - c^2 = 2\alpha b - b$ e $2bc = c \Rightarrow 2bc - c = 1$
De $2bc = c \Rightarrow 2bc - c = 0 \Rightarrow (2b-1)c = 0 \Rightarrow c = 0$ ou $b = \frac{1}{2}$.

- Considerando $c = 0$ em $b^2 - c^2 = 2\alpha b - b \Rightarrow b^2 = 2\alpha b - b \Rightarrow b(b - 2\alpha + 1) = 0 \Rightarrow b = 0$ ou $b = 2\alpha - 1 \Rightarrow z_1 = 2\alpha - 1$ ou $z_2 = 0$, com $\alpha \neq \frac{1}{2}$.
- Considerando $b = \frac{1}{2}$ em $b^2 - c^2 = 2\alpha b - b \Rightarrow \frac{1}{4} - c^2 = 2\alpha.\frac{1}{2} - \frac{1}{2} \Rightarrow$

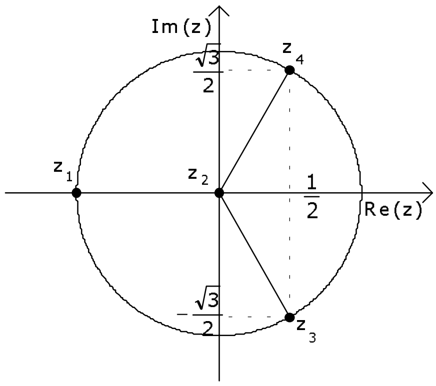
$4c^2 = 1 + 2 - 4\alpha \Rightarrow c = \pm\sqrt{\frac{3-4\alpha}{4}} = \pm\frac{\sqrt{3-4\alpha}}{2}$. Sendo c um número real, então: $3 - 4\alpha \geq 0 \Rightarrow \alpha \leq \frac{3}{4}$. $\Rightarrow z_3 = \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3-4\alpha}}{2}i$ ou $z_4 = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3-4\alpha}}{2}i$

- As quatro soluções são: $z_1 = 2\alpha - 1$, $z_2 = 0$, $z_3 = \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3-4\alpha}}{2}i$ (com $\alpha \leq \frac{3}{4}$) e $z_4 = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3-4\alpha}}{2}i$ (com $\alpha \leq \frac{3}{4}$).

Resposta: $\alpha \leq \frac{3}{4}$ e $\alpha \neq \frac{1}{2}$.

b) Sendo $\alpha = 0 \Rightarrow z_1 = -1$, $z_2 = 0$, $z_3 = \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i$ e $z_4 = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$.
O afixo de um número complexo é o ponto determinado pelo par ordenado cujas coordenadas são a parte real e a parte imaginária, respectivamente, do número em questão.

Resposta:



QUESTÃO 05:

O produto de duas das raízes do polinômio $p(x) = 2x^3 - mx^2 + 4x + 3$ é igual a -1. Determinar:
a) o valor de m.
b) as raízes de p.

Resolução:

a) Consideremos x′, x″ e x‴ como raízes do polinômio $p(x) = 2x^3 - mx^2 + 4x + 3$, sendo, $x'.x'' = -1$(dado do problema) e $x'.x''.x''' = -\frac{3}{2} \Rightarrow -1.x''' = -\frac{3}{2} \Rightarrow x''' = \frac{3}{2}$.

De $x''' = \frac{3}{2} \Rightarrow p\left(\frac{3}{2}\right) = 0 \Rightarrow 2\left(\frac{3}{2}\right)^3 - m\left(\frac{3}{2}\right)^2 + 4\left(\frac{3}{2}\right) + 3 = 0 \Rightarrow$

$$\frac{27}{4} - \frac{9m}{4} + 9 = 0 \Rightarrow 27 - 9m + 36 = 0 \Rightarrow m = 7$$

Resposta: m = 7

b) De $m = 7 \Rightarrow p(x) = 2x^3 - 7x^2 + 4x + 3$.

Sendo $x''' = \frac{3}{2}$, e como $x'+x''+x''' = \frac{7}{2} \Rightarrow x'+x'' = \frac{7}{2} - \frac{3}{2} = 2$.

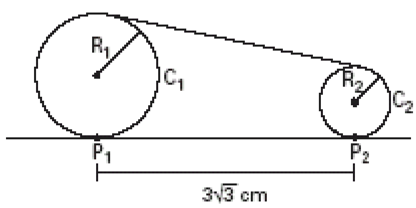
$$\begin{cases} x'+x'' = 2 \\ x'x'' = -1 \end{cases} \Rightarrow x^2 - 2x - 1 = 0 \Rightarrow x = \frac{2 \pm \sqrt{8}}{2} \Rightarrow x' = 1 - \sqrt{2} \text{ ou } x'' = 1 + \sqrt{2}$$

Resposta:
As raízes de p(x) são: $x' = 1 - \sqrt{2}$, $x'' = 1 + \sqrt{2}$ e $\frac{3}{2}$.

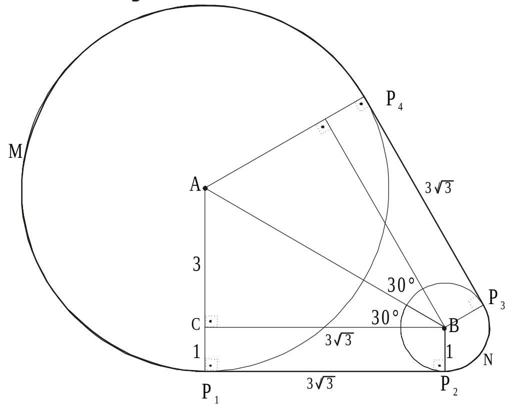
1

QUESTÃO 06:

A figura abaixo representa duas polias circulares C_1 e C_2 de raios $R_1 = 4cm$ e $R_2 = 1cm$, apoiadas em uma superfície plana em P_1 e P_2, respectivamente. Uma correia envolve as polias, sem folga. Sabendo-se que a distância entre os pontos P_1 e P_2 é $3\sqrt{3}$ cm, determinar o comprimento da correia.



Resolução:



A distância $P_1P_2 = 3\sqrt{3}$ cm é a distância entre os centros de C_1 e C_2.
$AC = R1 - R_2 = 4 - 1 = 3$.

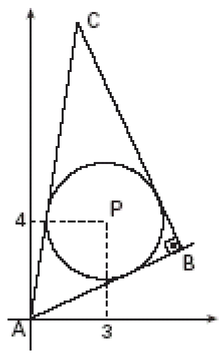
No triângulo retângulo ABC, $tg\hat{B} = \dfrac{3}{\sqrt{3}} = \dfrac{\sqrt{3}}{3} \Rightarrow \hat{B} = 30° \Rightarrow \widehat{P_3NP_4} = 120°$ e o arco $\widehat{P_1MP_2} = 240°$.

O comprimento do arco $\widehat{P_3NP_4} = 120°$ é: $\dfrac{2.1\pi}{3} = \dfrac{2\pi}{3}$ e o comprimento do arco $\widehat{P_1MP_2} = 240°$, é $\dfrac{2.2.4\pi}{3} = \dfrac{16\pi}{3}$.

O comprimento da polia é $\left(2.\,3\sqrt{3} + \dfrac{2\pi}{3} + \dfrac{16\pi}{3}\right)cm = \left(6\sqrt{3} + 6\pi\right)cm = 6\left(\sqrt{3} + \pi\right)cm$

QUESTÃO 07:

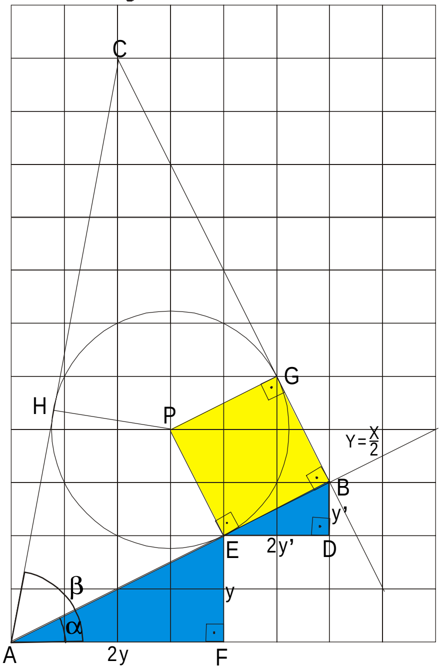
Na figura abaixo, os pontos A, B e C são vértices de um triângulo retângulo, sendo $\hat{B}$ o ângulo reto.



Sabendo-se que A = (0, 0), B pertence à reta $x - 2y = 0$ e P = (3, 4) é o centro da circunferência inscrita no triângulo ABC, determinar as coordenadas

a) do vértice B.
b) do vértice C.

Resolução:



Analisando a figura vemos que

A distância PE, do ponto P(3,4), centro da circunferência, à reta AB é o raio da mesma circunferência: $r = \dfrac{|3.1 - 4.2|}{\sqrt{4+1}} = \dfrac{5}{\sqrt{5}} = \sqrt{5}$

A interseção da circunferência com a reta de equação x-2y=0 é dada pela solução do sistema;

$$\begin{cases} x = 2y \\ (x-3)^2 + (y-4)^2 = 5 \end{cases} \Rightarrow (2y-3)^2 + (y-4)^2 = 5 \Rightarrow 5y^2 - 20y + 20 = 0$$

$y^2 - 4y + 4 = 0 \Rightarrow (y-2)^2 = 0 \Rightarrow y = 2 \Rightarrow E = (4,2)$ (**I**)

O ponto B pertence à reta $x - 2y = 0 \Rightarrow BE = \sqrt{5} \Rightarrow$ aplicando o teorema de Pitágoras no triângulo EDB: $4y'^2 + y'^2 = 5 \Rightarrow y' = 1$ (**II**)

a) **Resposta**: Pela figura e de (**I**) e (**II**) concluímos que o ponto **B = (6,3)**.

O ponto B = (6,3) pertence à reta BC. A reta BC é perpendicular à reta $x - 2y = 0 \Rightarrow$ a equação da reta BC é da forma $y = -2x + a \Rightarrow 3 = -12 + a \Rightarrow a = 15 \Rightarrow$ a equação da reta BC é $y = -2x + 15$. (**III**)

A reta AC é da forma $bx - y = 0$ e sua distância ao ponto P(3,4) é:

$$PH = \frac{|3b-4|}{\sqrt{b^2+1}} = \sqrt{5} \Rightarrow |3b-4| = \sqrt{5(b^2+1)} \Rightarrow |3b-4|^2 = 5(b^2+1) \Rightarrow$$

$$9b^2 - 24b + 16 = 5b^2 + 5 \Rightarrow 4b^2 - 24b + 11 = 0 \Rightarrow b = \frac{24 \pm \sqrt{576-176}}{8} \Rightarrow$$

$$b = \frac{24 \pm \sqrt{400}}{8} = \frac{4(6 \pm 5)}{8} = \frac{6 \pm 5}{2} \Rightarrow b = \frac{1}{2} \text{ ou } b = \frac{11}{2}.$$

Sendo $x - 2y = 0$ a equação da reta AB, podemos escreve-la na sua forma reduzida com $y = \frac{x}{2} \Rightarrow tg\alpha = \frac{1}{2}$. Como $\alpha > \beta \Rightarrow tg\beta > \frac{1}{2} \Rightarrow tg\beta = b \Rightarrow b = \frac{11}{2}$

A equação da reta AC é y = $\frac{11}{2}$x. (**IV**)

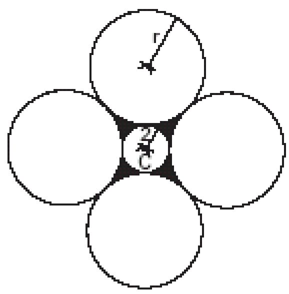
b) **Resposta**: O ponto C é dado então pela interseção dos gráficos das equações (**III**) e (**IV**):

$$\begin{cases} y = -2x + 15 \\ y = \frac{11}{2}x \end{cases} \Rightarrow \frac{11}{2}x = -2x + 15 \Rightarrow x = 2 \text{ e } y = 11.$$

C = (2,11).

QUESTÃO 08:

Na figura abaixo, cada uma das quatro circunferências externas tem mesmo raio r e cada uma delas é tangente às outras duas
e à circunferência interna C.

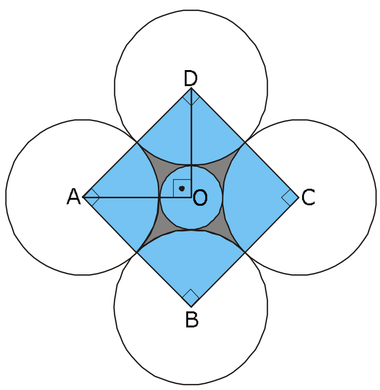


Se o raio de C é igual a 2, determinar:

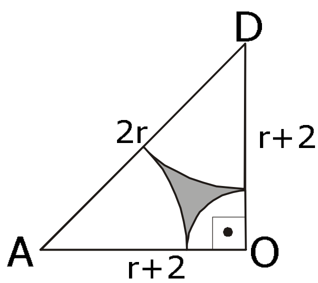
a) o valor de r.
b) a área da região hachurada.

Resolução:

1)



2)



Consideremos A, B, C e D como centros das circunferências externas, tangentes duas a duas e ao mesmo tempo tangentes à circunferência de raio 2 e centro em º.

Resolvendo o triângulo retângulo AOB pela aplicação do teorema de Pitágoras: $4r^2 = 2(r+2)^2 \Rightarrow 2r^2 = r^2 + 4r + 4 \Rightarrow r^2 - 4r - 4 = 0 \Rightarrow$ $r = \dfrac{4+\sqrt{32}}{2} = \dfrac{4+4\sqrt{2}}{2} = 2+2\sqrt{2} = 2(1+\sqrt{2})$

a) **Resposta**: O valor de r é $2(1+\sqrt{2})$

Analisando a figura 1 construída para a interpretação do problema, concluímos que a área S,(pintada de azul), corresponde à soma das áreas de um círculo de raio r com um círculo de raio 2 :
$S = \pi r^2 + \pi.4 = \pi + 4\pi = 12\pi + 8\sqrt{2}\pi + 4\pi = 8\sqrt{2}\pi + 16\pi$.
O lado do quadrado ABCD é 2r.

b) A área pedida $S_1 = S_{ABCD} - S = 4r^2 - (8\sqrt{2}\pi + 16\pi) =$
$= 4\left[2(1+\sqrt{2})\right]^2 - (8\sqrt{2}\pi + 16\pi) = 16\left(3+2\sqrt{2}\right) - (8\sqrt{2}\pi + 16\pi) \Rightarrow$
$S_1 = 48 + 32\sqrt{2} - 16\pi - 8\sqrt{2}\pi$

Resposta: $S_1 = 48 + 32\sqrt{2} - 16\pi - 8\sqrt{2}\pi$

QUESTÃO 09:

Seja $m \geq 0$ um número real e sejam f e g funções reais definidas por $f(x) = x^2 - 2|x| + 1$ e $g(x) = mx + 2m$.

a) Esboçar, no plano cartesiano representado abaixo, os gráficos de f e de g quando $m = \dfrac{1}{4}$ e $m = 1$.

b) Determinar as raízes de $f(x) = g(x)$ quando $m = \dfrac{1}{2}$.

c) Determinar, em função de m, o número de raízes da equação $f(x) = g(x)$.

Resolução:

a) Sendo $f(x) = x^2 - 2|x| + 1$, temos a considerar duas possibilidades:

$x \geq 0$:
$f(x) = x^2 - 2x + 1$ cuja raiz é $x = 1$.

$x < 0$
$f(x) = x^2 - 2(-x) + 1 = x^2 + 2x + 1$ cuja raiz é $x = -1$.

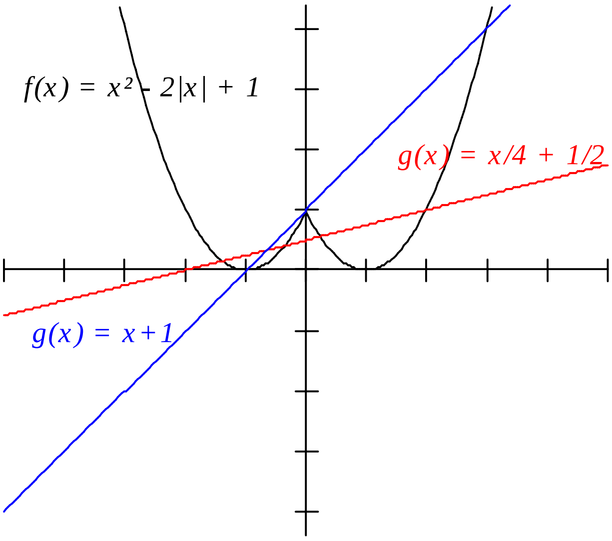
$g(x) = mx + 2m$

Se $m = \dfrac{1}{4}$

$g(x) = \dfrac{1}{4}x + \dfrac{1}{2}$

Se $m = 1$
$g(x) = x+2$

Resposta:



b) Se g(x) = mx + 2m e m = $\frac{1}{2}$ $\Rightarrow$ g(x) = $\frac{1}{2}$x + 1.

Neste caso se f(x) = g(x) $\Rightarrow$ $x^2 - 2|x| + 1 = \frac{1}{2}x + 1 \Rightarrow$

I- Se x ≥ 0: $x^2 - 2|x| + 1 = \frac{1}{2}x + 1$

$x^2 - 2x - \frac{1}{2}x = 0 \Rightarrow 2x^2 - 5x = 0.$

x = 0 ou x = $\frac{5}{2}$

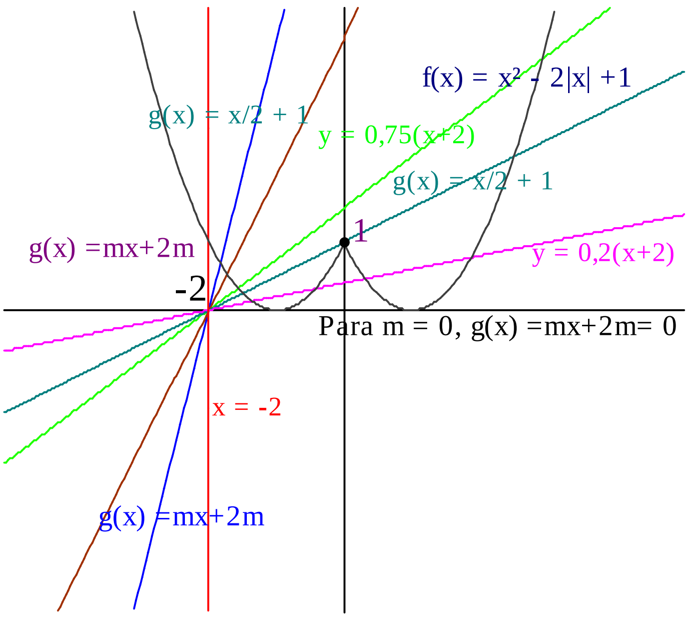
II- Se x < 0: $x^2 - 2|x| + 1 = \frac{1}{2}x + 1$

$x^2 + 2x - \frac{1}{2}x = 0 \Rightarrow 2x^2 + 3x = 0$

x = - $\frac{3}{2}$

Respostas: As raízes da equação f(x) = g(x) são: 0, $\frac{5}{2}$ e - $\frac{3}{2}$.

c)



Determinemos as raízes de g(x) = mx+2m: mx+2m = 0 ⇒ **x = -2, qualquer que seja o valor atribuído a m** (confirmado pelo gráfico).
g(x) = mx+2m é um feixe de infinitas retas passando pelo ponto (-2,0).
Deste feixe existe uma que passa pelo ponto determinado por f(0).
f(0) = 0-0+1 = 1⇒ (0,1) é um ponto do gráfico de f(x).

Para g(0) = 1 ⇒ 0m+2m=1 ⇒ $m = \frac{1}{2}$

Resposta:

Analisando o gráfico e levando em conta que m ≥ 0, concluímos que:

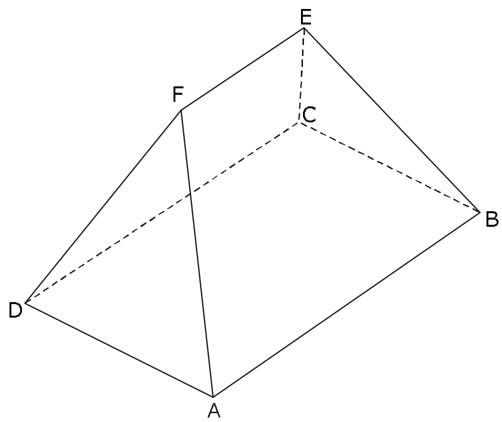
Para m = 0, existem duas raízes diferentes.

Para $0 < m \leq \frac{1}{2}$, existem quatro raízes diferentes.

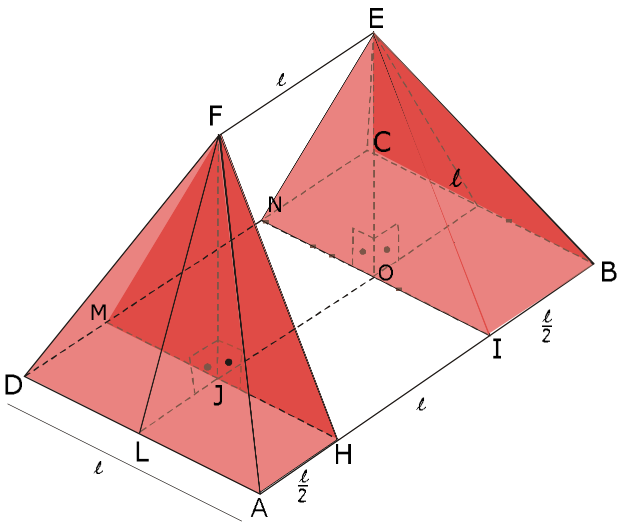
Para $m > \frac{1}{2}$, existem três raízes diferentes.

QUESTÃO 10:

No sólido S representado na figura ao lado, a base ABCD é um retângulo de lados AB = 2ℓ e AD = ℓ; as faces ABEF e DCEF são trapézios; as faces ADF e BCE são triângulos eqüiláteros e o segmento EF tem comprimento ℓ. Determinar, em função de ℓ, o volume de S.



Resolução:



Seccionando o sólido segundo os planos FHM e EIN perpendiculares ao plano ABC determinamos o prisma triangular FMHIEN de base FHM e altura $\overline{FE}$ e as pirâmides FAHMD e EIBCN, equivalentes de bases retangulares e agruras, respectivamente, $\overline{FJ}$ e $\overline{EO}$ de medidas iguais.

(**I**).Um dos dados do problema é que o triângulo ADE é eqüilátero, logo sua altura EF = $\dfrac{\ell\sqrt{3}}{2}$.

No triângulo retângulo FJL pela aplicação do teorema de Pitágoras:

FJ = $\sqrt{\dfrac{3\ell^2}{4} - \dfrac{\ell^2}{4}} = \dfrac{\ell\sqrt{2}}{2}$.

Volume das pirâmides: $2\left(\dfrac{1}{3} \times \dfrac{\ell}{2} \times \ell \times \dfrac{\ell\sqrt{2}}{2}\right) = \dfrac{\ell^3\sqrt{2}}{6}$ (**I**).

Volume do prisma $\dfrac{\ell . \dfrac{\ell\sqrt{2}}{2}}{2} \times \ell = \dfrac{\ell^3\sqrt{2}}{4}$ (**II**).

Somando os volumes (**I**) e (**II**): $\dfrac{\ell^3\sqrt{2}}{6} + \dfrac{\ell^3\sqrt{2}}{4} = \dfrac{5\ell^3\sqrt{2}}{12}$