VESTIBULAR DA MACKENZIE - SP
Grupos **II e III** Prova Tipo **A 2004**
PROVA DE MATEMÁTICA

RESOLUÇÃO E COMENTÁRIOS POR PROFA. MARIA ANTONIA GOUVEIA

Questão nº 01

Os números compreendidos entre 400 e 1 500, divisíveis ao mesmo tempo por 18 e 75, têm soma:

a) 1 600 b) 2 350 c) 1 350 d) 2 700 e) 1 800

RESOLUÇÃO:

$18 = 2\times3^2$ e $75 = 3\times5^2$, então o menor múltiplo comum de 18 e 75,compreendido entre 400 e 1500, é $2\times3^2\times5^2 = 450$.
Os números ao mesmo tempo divisíveis por 18 e 75 são múltiplos de 450.
$1500 = 450\times3 +150 \Rightarrow 1500-150=1350$ é múltiplo de 450.
Consideremos a PA: 450, 900, 1350.
450+900+1350 = 2700.

RESPOSTA: d

Questão nº 02

Uma empresa decidiu presentear seus principais clientes com lotes de 1000 ações. Os clientes foram classificados em ordem crescente, de acordo com o faturamento de cada um deles. Ao primeiro, a empresa entregou 1 lote, ao segundo 3 lotes, ao terceiro, 5 lotes e assim por diante. Se a empresa distribuiu um total de 1.089.000 ações, o número de clientes presenteados foi:

a) 47 b) 37 c) 43 d) 32 e) 33

RESOLUÇÃO:

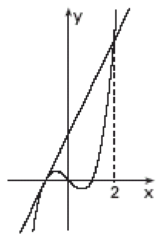
Seja a PA 1, 3, 5, 7 ,...., onde a_1,= 1, r = 2 e $S_n = 1089 \Rightarrow$
$1089 = \frac{[1+1+(n-1)\times 2]n}{2} \Rightarrow 2n+2n^2-2n = 2178 \Rightarrow n^2 = 1089 \Rightarrow n=33$

RESPOSTA: e.

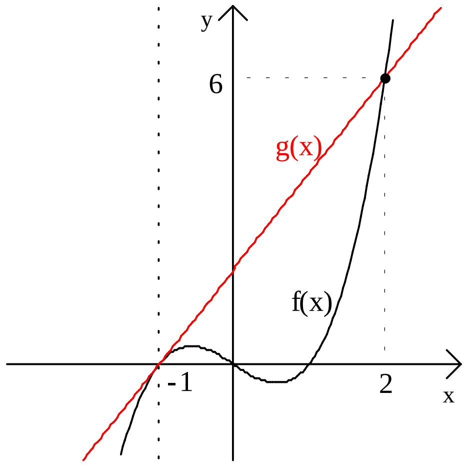
Questão nº 03

Na figura, temos os esboços dos gráficos de
f (x) = $x^3 - x$ e g (x) = ax + b. O produto a . b é igual a:

a) – 4 b) 4 c) 2 d) 6 e) – 2



RESOLUÇÃO:



f (x) = x^3 – x ⇒ f (x) = x(x – 1)(x+1) ⇒ que as raízes de f(x) são –1, 0 ou 1.

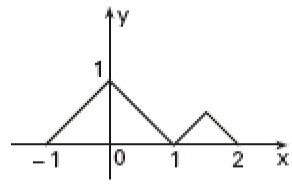
g(2) = f(2) = 8-2 = 6 e g(-1) = 0 ⇒ $\begin{vmatrix} 2 & -1 & x & 2 \\ 6 & 0 & g(x) & 6 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow$

-g(x) +6x –2g(x)+6 = 0 ⇒ g(x) = 2x+2.

Então a×b = 4.

RESPOSTA: b.

Questão nº 04



Considere o esboço do gráfico da função f , definida em [–1 ; 2].
A soma dos valores de x , tais que f(f(x)) = 1 , é:

a) 2 b) 3 c) 0 d) 1 e) 4

RESOLUÇÃO:

Analisando o gráfico e fazendo f(x) = a, temos f(f(x)) = f(a) = 1 ⇒ a = 0 ⇒ f(x) = 0 ⇒ x = -1 ou x = 1 ou x = 2 cuja soma é –1+1+2 = 2.

RESPOSTA: a

Questão nº 05

Considerando que x – y = $\sqrt[3]{3}$ e que x + y = $\sqrt{3}$, o valor de $\log_3\left(x^2 - y^2\right)$ é:

a) $\frac{\sqrt{3}}{3}$ b) $\frac{2}{5}$ c) $\sqrt{3}$ d) $\frac{3}{2}$ e) $\frac{5}{6}$

RESOLUÇÃO:

$$\log_3\left(x^2 - y^2\right) \Rightarrow \log_3 (X - y)(X + Y) = \log_3\left(3^{\frac{1}{3}} \times 3^{\frac{1}{2}}\right) = \frac{1}{3} + \frac{1}{2} = \frac{5}{6}.$$

RESPOSTA: e.

Questão nº 06

A soma dos inteiros x tais que $\log_{\left(3-\frac{x}{3}\right)} \frac{1}{2} - \log_{\left(3-\frac{x}{3}\right)} \frac{4}{5} > 0$ é:

a) 10 b) 12 c) 14 d) 15 e) 18

RESOLUÇÃO:

Sendo $\frac{1}{2} < \frac{4}{5}$ e $\log_{\left(3-\frac{x}{3}\right)}\frac{1}{2} - \log_{\left(3-\frac{x}{3}\right)}\frac{4}{5} > 0 \Rightarrow \log_{\left(3-\frac{x}{3}\right)}\frac{1}{2} > \log_{\left(3-\frac{x}{3}\right)}\frac{4}{5} \Rightarrow$

$0 < 3 - \frac{x}{3} < 1 \Rightarrow -9 < -x < 3 - 9 \Rightarrow 6 < x < 9$. Logo a soma dos inteiros que satisfazem ao intervalo é: 7 + 8 = 15.

RESPOSTA: d.

Questão nº 07

No sistema $\begin{cases} x^y = y^x \\ \frac{x}{y} = 2 \end{cases}$, com x > 0 e y > 0 , 5x – y vale:

a) 14 b) 12 c) 18 d) 16 e) 20

RESOLUÇÃO:

$\frac{x}{y} = 2 \Rightarrow x = 2y \Rightarrow (2y)^y = y^{2y} \Rightarrow (2y)^y = (y^2)^y \Rightarrow 2y = y^2 \Rightarrow$ sendo y > 0, y = 2 ⇒ x = 4 ⇒ 5x – y = 20 –2 = 18.

RESPOSTA: c

Questão nº 08

O número de soluções reais da equação $x^2 = 1 - |x|$ é:

a) 2 b) 0 c) 1 d) 4 e) 3

RESOLUÇÃO:

Como $x^2 = 1 - |x| \Rightarrow 1 - |x| \geq 0 \Rightarrow |x| \leq 1 \Rightarrow -1 \leq x \leq 1$

I) Para $x \geq 0$, de $x^2 = 1 - |x|$, temos: $x^2 = 1 - x \Rightarrow x^2 + x - 1 = 0$, cujas raízes reais são: $x' = \frac{-1-\sqrt{5}}{2}$ = -1,61|, $x'' = \frac{-1+\sqrt{5}}{2}$ = 0,62.

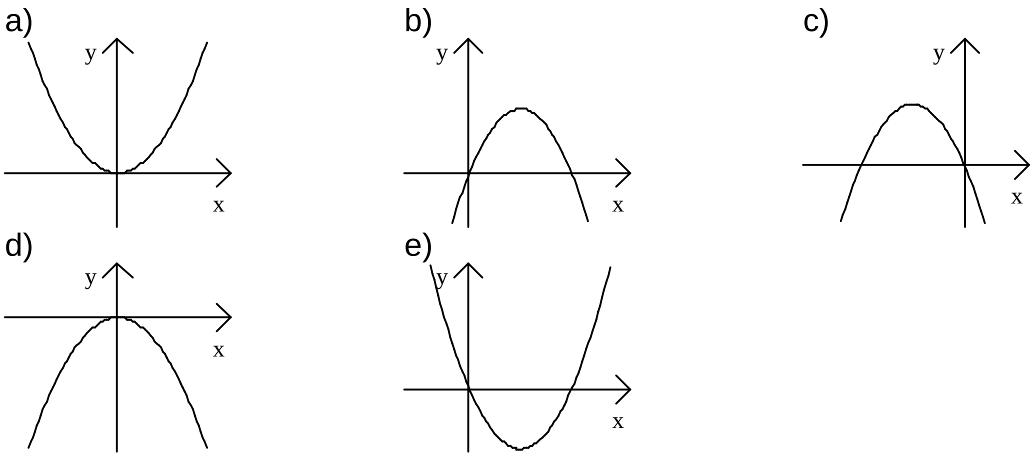
II) Para $x < 0$, de $x^2 = 1 - |x|$, temos: $x^2 = 1 - (-x) \Rightarrow x^2 - x - 1 = 0$, cujas raízes reais são: $x' = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$ = -0,62|, $x'' = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ = 1,61.

Logo como $-1 \leq x \leq 1$, a equação $x^2 = 1 - |x|$ tem duas raízes reais:
$x' = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$ = -0,62 e $x'' = \frac{-1+\sqrt{5}}{2}$ = 0,62.

RESPOSTA: a.

Questão nº 09

Considere o polinômio P (x), do segundo grau, tal que P (x) – P (x + 1) = x, qualquer que seja x real. Sabendo que P (0) = 0, assinale, dentre as alternativas, o melhor esboço gráfico de y = P (x).



RESOLUÇÃO:

Sendo P (x) – P (x + 1) = x e P(0) = 0 $\Rightarrow$ 0 – P(1) = 0 $\Rightarrow$ P(1) = 0 $\Rightarrow$ 0 e 1 são raízes de P(x).
Por eliminação temos apenas os gráficos **b** e **e** que apresentam 0 e 1 como raízes,
Fazendo x = 1 $\Rightarrow$ P(1) – P(2) = 1 $\Rightarrow$ P(2) = -1

Concluímos que P(0) = 0 (dado), P(1) =) e P(2) = -1 $\Rightarrow$ que o gráfico que melhor expressa a função P(x) é o gráfico b.

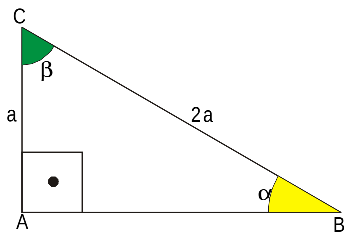
RESPOSTA; b

Questão nº 10

Em um triângulo retângulo, a medida da hipotenusa é o dobro da medida de um dos catetos. O ângulo oposto ao menor lado desse triângulo mede:
a) 36° b) 60° c) 45° d) 30° e) 72°

RESOLUÇÃO:

Seja o triângulo retângulo ABC construído de acordo com os dados do problema.
$\operatorname{sen}\alpha = \frac{a}{2a} = \frac{1}{2} \Rightarrow \alpha = 30°$ e β = 60°.
RESPOSTA: d.



Questão nº 11

Se tg $\frac{\theta}{2} =$ senθ e $\cos\theta \neq 0$, então o valor da tgθ é:

a) –1 b) $-\frac{\sqrt{3}}{3}$ c) $\frac{1}{2}$ d) 1 e) 0

RESOLUÇÃO:

$$\text{tg}\ \frac{\theta}{2} = \text{sen}\theta \Rightarrow \text{tg}\ 2\left(\frac{\theta}{2}\right) = \frac{2\text{tg}\frac{\theta}{2}}{1 - \text{tg}^2\frac{\theta}{2}} \Rightarrow \text{tg}\theta = \frac{2\text{sen}\theta}{1 - \text{sen}^2\theta} \Rightarrow \text{tg}\theta = \frac{2\text{sen}\theta}{\cos^2\theta} \Rightarrow$$

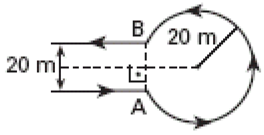
$$\frac{\text{sen}\theta}{\cos\theta} \times \cos^2\theta = 2\text{sen}\theta \Rightarrow \text{sen}\theta \times \cos\theta = 2\text{sen}\theta \Rightarrow \text{sen}\theta = 0 \text{ ou } \cos\theta = 2\ (\text{impossível}) \Rightarrow$$

$\text{sen}\theta = 0 \Rightarrow$ que sendo $\cos\theta \neq 0 \Rightarrow \text{tg}\theta = 0$.

RESPOSTA: e

Questão nº 12

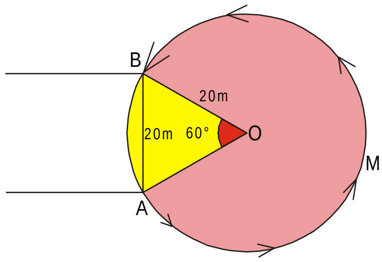
Percorrendo uma estrada de 20m de largura, um veículo inicia um retorno em um ponto A, utilizando a trajetória circular da figura, cujo raio é 20m. Se nessa rotatória a velocidade máxima permitida é de 20 km/h, o menor tempo necessário para que esse veículo percorra o arco AB é: (adote $\pi = 3$)



a) 12 seg b) 18 seg c) 15 seg d) 25 seg e) 22 seg

RESOLUÇÃO:

Se o raio do círculo mede 20m e o segmento AB (largura da estrada e corda do círculo) também mede 20m, então o ângulo central AÔB mede 60°.
O comprimento do arco AMB (300°) é: $\frac{300}{360} \times 2 \times 20\pi = \frac{5}{6} \times 40 \times 3 = 100$ m = 0,1km.
0,1km:20km = 0,005h = 0,005×3600seg = 18seg.



RESPOSTA : b

Questão nº 13

As representações gráficas dos complexos 1 + i , $(1 + i)^2$, –1 e $(1 – i)^2$, com $i^2 = –1$, são vértices de um polígono de área:

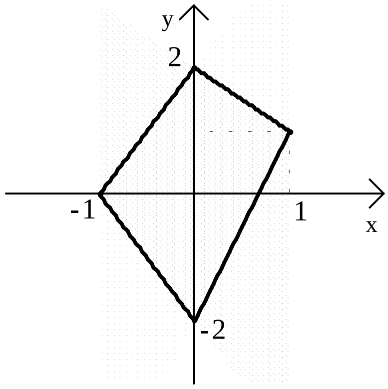
a) 2 b) 1 c) $\frac{3}{2}$ d) 3 e) 4

RESOLUÇÃO:

O afixo do número 1+i é dado pelo par ordenado (1,1)
O afixo do número $(1+i)^2 = 2i$ é dado pelo par ordenado (0,2).
O afixo do número –1 é dado pelo par ordenado (-1,0).
O afixo do número $(1-i)^2 = -2i$ é (0,-2)

O quadrilátero determinado pelos a fixos dos quatro números complexos está representado no gráfico ao lado.
A área da figura é dada pelo falso determinante:

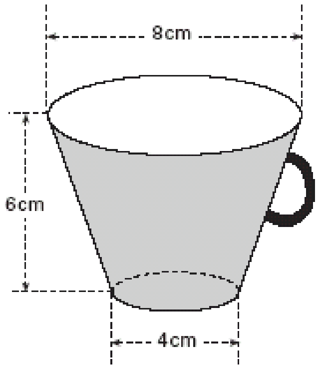
$$\frac{1}{2}\begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 0 & -2 & 1 \end{vmatrix} = \frac{1}{2}\left|2+2+2+2\right| = 4.$$



RESPOSTA: e

Questão nº 14

Uma xícara de chá tem a forma de um tronco de cone reto, conforme a figura. Supondo $\pi = 3$, o volume máximo de líquido que ela pode conter é:



a) 168 cm^3 b) 172 cm^3 c) 166 cm^3

d) 176 cm^3 e) 164 cm^3

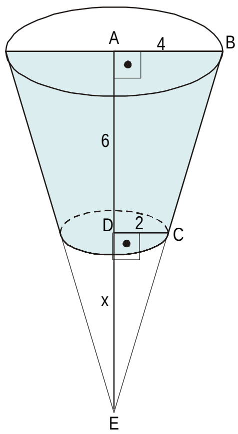
RESOLUÇÃO:

Os triângulos retângulos EDC e EAB são semelhantes, logo:

$\frac{4}{2} = \frac{6+x}{x} \Rightarrow 2x = 6 + x \Rightarrow x = 6.$

O volume do tronco de pirâmide será:

$V = V_{cone\ maior} - V_{cone\ menor} \Rightarrow V = \frac{16\pi \times 12}{3} - \frac{4\pi \times 6}{3} = 64\pi - 8\pi = 56\pi = 56 \times 3 = 168\,cm^3$



RESPOSTA: a

Questão nº 15

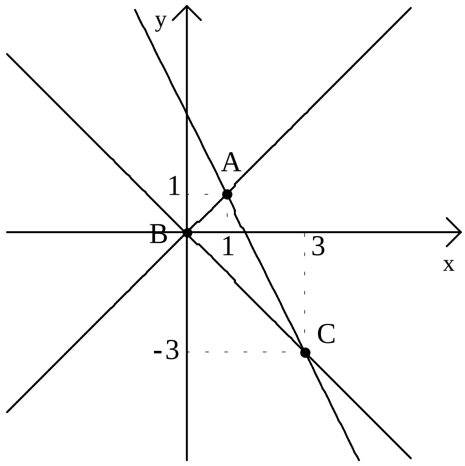
As retas $x + y = 0$, $x - y = 0$ e $2x + y - 3 = 0$ definem um triângulo de área:

a) $\sqrt{2}$ b) 4 c) $2\sqrt{3}$ d) 3 e) 2

RESOLUÇÃO:

Resolvendo os sistemas

$\begin{cases} x + y = 0 \\ 2x + y = 3 \end{cases}$ e $\begin{cases} x - y = 0 \\ 2x + y = 3 \end{cases}$ temos para soluções os pontos A = (1,1) e C – (3,-3), respectivamente.



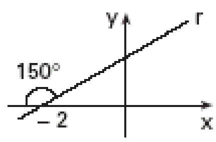
A área do triângulo ABC è:

$$\frac{1}{2}\begin{vmatrix} 1 & 0 & 3 & 1 \\ 1 & 0 & -3 & 1 \end{vmatrix} = \frac{1}{2}|3+3| = 3.$$

RESPOSTA: d

Questão nº 16

Na figura, se a reta r é tangente à curva (x-a)² + y² = a², a > 0, então o valor de a é:



a) 4 b) $\frac{4}{5}$ c) 2 d) 3 e) $\frac{3}{4}$

RESOLUÇÃO:

Como a reta r forma com o eixo dos x um ângulo de 150°, então o coeficiente angular de r é tg30° = $\frac{\sqrt{3}}{3}$. $\Rightarrow$ A equação de r é y = $\frac{\sqrt{3}}{3}$x+b.

A reta r passa pelo ponto (-2,0), então: $\frac{-2\sqrt{3}}{3}$ +b = 0 $\Rightarrow$ b = $\frac{2\sqrt{3}}{3}$.

r : y - $\frac{\sqrt{3}}{3}$x - $\frac{2\sqrt{3}}{3}$ = 0.

A circunferência (x-a)² + y² = a², a > 0 tem centro no ponto (a,0) e raio a.
Como a reta é tangente à circunferência então a distância da reta r ao centro da circunferência é igual à medida do raio que é a.
Pela fórmula da distância de um ponto a uma reta temos:

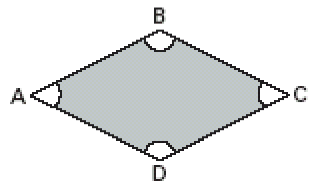
$$\frac{\left|0 - \frac{a\sqrt{3}}{3} - \frac{2\sqrt{3}}{3}\right|}{\sqrt{\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right)^2 + 1}} = a \Rightarrow \frac{\left|\frac{a\sqrt{3}}{3} + \frac{2\sqrt{3}}{3}\right|}{\sqrt{\frac{3}{9}+1}} = a \Rightarrow \left|\frac{a\sqrt{3}}{3} + \frac{2\sqrt{3}}{3}\right| = a\sqrt{\frac{12}{9}} \Rightarrow \frac{\sqrt{3}}{3}|a+2| = 2a\frac{\sqrt{3}}{3} \Rightarrow$$

|a + 2| = 2a $\Rightarrow$ a + 2 = 2a ou a + 2 = - 2a $\Rightarrow$ a = 2 ou a = - $\frac{2}{3}$.

Sendo a > 0, então a = 2.

RESPOSTA: c.

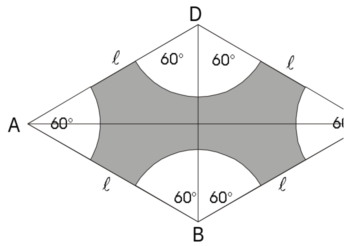
Questão nº 17



Na figura, cada vértice do losango ABCD é o centro de um arco de raio igual a 1. Se o ângulo de vértice A mede 60º e a área assinalada é igual a $8\sqrt{3} - \pi$, o lado do losango é igual a:

a) 3 b) 4 c) 3,5 d) 5 e) 4,5

RESOLUÇÃO:



O losango por hipótese tem um ângulo de 60°, logo é formado da junção dos triângulos eqüiláteros.ADB e CDB.
A diagonal AC é então o dobro da altura de um destes triângulos $\Rightarrow$
AC = $2\left(\frac{l\sqrt{3}}{2}\right) = l\sqrt{3}$.

A diagonal DB tem a mesma medida ℓ dos lados do losango.
A área assinalada é S = $S_{losango} - S_{círculo} = \frac{AC \times BD}{2} - \pi = \frac{l\sqrt{3} \times l}{2} - \pi = \frac{l^2\sqrt{3}}{2} - \pi$.
Pelos dados do problema S = $8\sqrt{3} - \pi$, então: $\frac{l^2\sqrt{3}}{2} - \pi = 8\sqrt{3} - \pi \Rightarrow \frac{l^2\sqrt{3}}{2} = 8\sqrt{3}$
$\Rightarrow l^2 = 16 \Rightarrow l = 4$.

RESPOSTA: b.

Questão nº 18

O sistema $\begin{cases} x - az = 0 \\ -x + y + z = 0, \; a \in \Re \\ ax - y = 0 \end{cases}$.

a) tem solução única, para um único valor de a.
b) não admite solução, qualquer que seja a.
c) tem solução única, qualquer que seja a.
d) tem mais de uma solução, qualquer que seja a.
e) tem mais de uma solução, para um único valor de a.

RESOLUÇÃO:

$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 0 & -a \\ -1 & 1 & 1 \\ a & -1 & 0 \end{vmatrix} \Rightarrow \Delta = -a + a^2 + 1$.

Para ter uma solução única devemos ter $\Delta \neq 0$
A equação $a^2 - a + 1 = 0$. não tem solução real pois a = $\frac{1 \pm \sqrt{1-4}}{2}$, então $\Delta \neq 0$ para qualquer valor real de a.

RESPOSTA: c

Questão nº 19

Em um determinado jogo, são sorteados 3 números entre os 30 que estão no volante de apostas. O apostador, que assinala 6 números no volante, ganha, se todos os 3 números sorteados estiverem entre os 6 assinalados. A probabilidade de o apostador ganhar é:

a) $\frac{1}{203}$ b) $\frac{1}{507}$ c) $\frac{1}{456}$ d) $\frac{1}{280}$ e) $\frac{1}{98}$

RESOLUÇÃO:

Como ele jogou seis números, a probabilidade de acertar o primeiro número sorteado é de $\frac{6}{30} = \frac{1}{5}$.

Acertado o primeiro número, a probabilidade de acertar o segundo é de $\frac{5}{29}$..

Tendo acertado os dois primeiros números, a probabilidade de também acertar o terceiro é de $\frac{4}{28} = \frac{1}{7}$.

Logo a probabilidade de levar o prêmio é de $\frac{1}{\cancel{5}} \times \frac{\cancel{5}}{29} \times \frac{1}{7} = \frac{1}{203}$.

RESPOSTA: a.

Questão nº 20

Considere todos os números de 3 algarismos formados com os algarismos 1, 2, 3, 5, 7 e 9. Dentre eles, a quantidade de números pares com exatamente 2 algarismos iguais é:

a) 17 b) 18 c) 15 d) 22 e) 24

RESOLUÇÃO:

Se as duas primeiras ordens forem ocupadas pelo algarismo 1 por exemplo.
A outra ordem será ocupada pelo algarismo 2 (o número tem que ser par), o número será, neste caso, 112. Os outros atendendo a estas características seriam: 332, 552, 772 e 992, cinco números portanto.
Pensando-se agora na repetição do 2 . Para a outra ordem teremos 5 opções

2	1	2

1	2	2

Nestas condições temos então $5 \times 2 = 10$ números.

O total procurado é então 5 + 10 = 15.

RESPOSTA: c.