Vestibular 2004 da Mackenzie.
Prova de Matemática- Grupo I
Resolução e Comentários da profa. Maria Antonia Gouveia

Questão nº 01

Uma empresa entrevistou k candidatos a um determinado emprego e rejeitou um número de candidatos igual a 5 vezes o número de candidatos aceitos. Um possível valor para k é:

a) 156 b) 280 c) 490 d) 548 e) 650

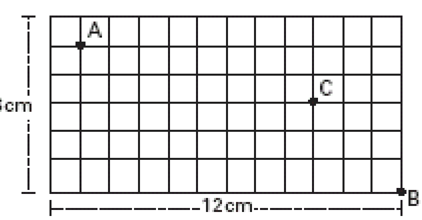
RESOLUÇÃO:

Seja n o número de candidatos aceitos. Então $K = n+5n = 6n$.
Assim k é um múltiplo de 6. Logo o único valor possível para k, entre os apresentados, é 156.

RESPOSTA:a.

Questão 02.

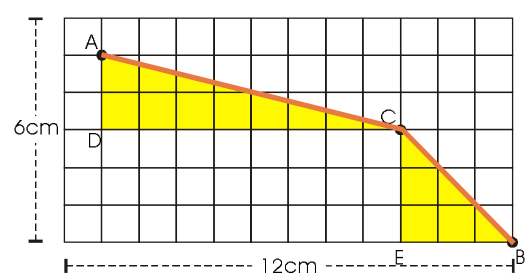
Na representação em escala, os quadrados são iguais e cada centímetro representa 100km. Um avião sai da cidade A, faz escala na cidade C, chegando à cidade B, conforme a figura. Das alternativas dadas, assinale o valor mais próximo da distância percorrida pelo avião, de A até B, passando por C.



a) 1000km b) 950km c) 1150km d) 1400km e) 1250km

RESOLUÇÃO:

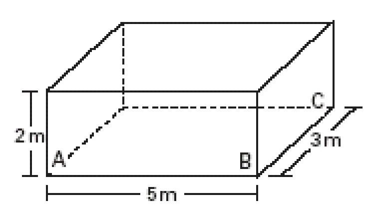
No triângulo ADC, $AC^2 = 4+64 \Rightarrow AC = \sqrt{68}$.
No triângulo CEB, $BC^2 = 18 \Rightarrow BC = \sqrt{18}$.
Então
$AC+BC = \sqrt{68} + \sqrt{18} = 8,25 + 4,24 = 12,49$cm.
Como na figura cada 1 cm representa 100km então, 12,49cm representam 1249km.



RESPOSTA: e.

Questão 03.

A caixa d'água da figura tem a forma de um paralelepípedo retângulo e volume V. Mantidos o volume V e a profundidade 2m, se a largura BC for mudada para 2m, o comprimento AB deverá ser:



a) 7,0m   b) 5,5m   c) 6,0m   d) 6,5m   e) 7,5m

RESOLUÇÃO:

$V = 2m \times 3m \times 5m = 30m^3$.

$V_n = 2m \times 2m \times c_n\, m = 30m^3 \Rightarrow 4c_n = 30 \Rightarrow c_n = 7,5$.

RESPOSTA: e.

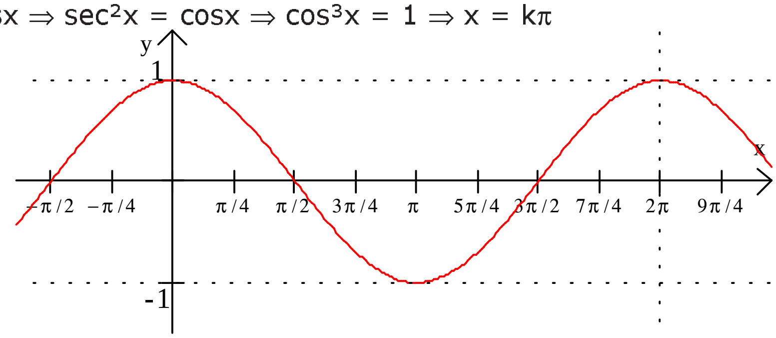
Questão 04.

A equação $1 + tg^2x = \cos x$ tem uma solução pertencente ao intervalo:

a) $\left[\frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}\right]$ b) $\left[\pi, \frac{3\pi}{2}\right]$ c) $\left[\frac{7\pi}{4}, \frac{9\pi}{4}\right]$ d) $\left[\frac{3\pi}{4}, \pi\right]$ e) $\left[\frac{3\pi}{2}, \frac{7\pi}{4}\right]$

RESOLUÇÃO:

$1 + tg^2x = \cos x \Rightarrow \sec^2x = \cos x \Rightarrow \cos^3x = 1 \Rightarrow x = k\pi$

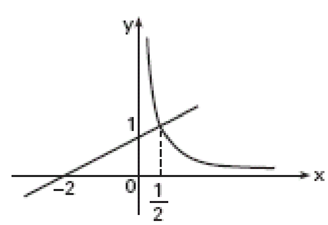


RESPOSTA: c.

Questão 05.

Na figura, temos os esboços dos gráficos das funções f e g.

Se $f(x) = \frac{a}{x}$, o valor de a é:



a) $\frac{1}{2}$ b) 2   c) $\frac{3}{2}$ d) $\frac{5}{8}$ e) $\frac{4}{3}$

RESOLUÇÃO:

$g(x) = mx+n \Rightarrow g(x) = mx + 1$.

A partir do gráfico temos: $g(-2) = 0 \Rightarrow -2m + 1 = 0 \Rightarrow m = \frac{1}{2} \Rightarrow g(x) = \frac{1}{2}x+1$.

Então $g(\frac{1}{2}) = \frac{1}{4} + 1 = \frac{5}{4}$.

Pelo gráfico concluímos que $g(\frac{1}{2}) = f(\frac{1}{2}) = \frac{5}{4} \Rightarrow \frac{a}{\frac{1}{2}} = \frac{5}{4} \Rightarrow 2a = \frac{5}{4} \Rightarrow a = \frac{5}{8}$

RESPOSTA: d.

Questão 06.

Em uma loja, a diferença entre o preço de venda e o preço de custo de um produto é de R$5.000,00. Se for dado um desconto de 10% sobre o preço de venda, ainda haverá um lucro de 20% para a loja. O preço de custo desse produto, em reais, é:
a) 23.000 b) 15.000) 30.000 d) 28.000 e) 18.000

RESOLUÇÃO:

A diferença entre o preço de venda e o preço de custo: V = C + 5 000.
Se for dado um desconto de 10% sobre o preço de venda, ainda haverá um lucro de 20% para a loja: $0,9(C + 5\,000.) = 1,2C \Rightarrow 1,2C - 0,9C = 4\,500 \Rightarrow$

$C = \dfrac{4500}{0,3} = 15.000$

RESPOSTA: b.

Questão 07.

Um número N é formado por dois algarismos a e b tais que a + b = 7. Se N – 1 é divisível por 7, então N + 1 é multiplo de:
a) 11 b) 9 c) 3 d) 13 e) 5

RESOLUÇÃO:

a + b = 7.						
a = 7	a = 6	a = 1	a= 5	a = 2	a = 4	a = 3
b = 0	b = 1	b = 6	b = 2	b = 5	b = 3	b = 4

Na tabela acima estão escritas todas as possibilidades para as quais a + b = 7.
Como N – 1 é divisível por 7 a possibilidade da coluna 7 é que atende a esta condição.
Então N = 43 e N+1 = 44 que é múltiplo de 11.

RESPOSTA: a.

Questão 08.

Supondo log 2 = 0,3, o valor de $\dfrac{2^{-5} \times \sqrt[3]{10^2}}{\sqrt[6]{10}}$ é:

a) $10^{\frac{1}{2}}$ b) $10^{\frac{3}{2}}$ c) 32 d) $\dfrac{1}{32}$ e) $\dfrac{1}{10}$

RESOLUÇÃO:

$x = \dfrac{2^{-5} \times \sqrt[3]{10^2}}{\sqrt[6]{10}} = \dfrac{2^{-5} \times \sqrt[6]{10^4}}{\sqrt[6]{10}} = 2^{-5} \times 10^{\frac{1}{2}} \Rightarrow \log x = \log\,(2^{-5} \times 10^{\frac{1}{2}}) \Rightarrow$

$\log x = -5(\log 2) + \dfrac{1}{2}(\log 10) = -5 \times 0{,}3 + \dfrac{1}{2} = -1{,}5 + 0{,}5 = -1 \Rightarrow$

Se $\log x = -1$, $x = 10^{-1}$.

RESPOSTA: e.

Questão 09.

Se $f(x) = \dfrac{2^{8-x}}{x^2}$, então f(10) pertence ao intervalo:

a) [0,004; 0,006 b) [0,02; 0,03]] c) [0; 0,001]
d) [0,002; 0,003] e) [0,04; 0,05]

RESOLUÇÃO:

$f(x) = \dfrac{2^{8-x}}{x^2} \Rightarrow f(10) = \dfrac{2^{8-10}}{100} = \dfrac{2^{-2}}{100} = \dfrac{1}{400} = 0{,}0025.$

RESPOSTA: d.

Questão 10.

Na progressão geométrica (a_1, a_2, a_3, ... , a_p, ...), de números reais, se $a_{p+2} = 1$ e $a_{p-3} = 32$, então a_{p+5} vale:

a) $\dfrac{1}{8}$ b) $\dfrac{1}{16}$ c) $\dfrac{2}{64}$ d) $\dfrac{3}{32}$ e) $\dfrac{1}{4}$

RESOLUÇÃO:

$a_{p-3}, a_{p-2}, a_{p-1}, a_p, a_{p+1}, a_{p+2}, a_{p+3}, a_{p+4}, a_{p+5} \Rightarrow$
$32, a_{p-2}, a_{p-1}, a_p, a_{p+1}, 1, a_{p+3}, a_{p+4}, a_{p+5}$

$1 = 32 \times q^{p+2-(p-3)} \Rightarrow 1 = 32 \times q^5 \Rightarrow q^5 = \dfrac{1}{32} \Rightarrow q = (2^{-5})^{\frac{1}{5}} = 2^{-1}$

$a_{p+5} = 32 \times q^{p+5-(p-3)} \Rightarrow a_{p+5} = 32 \times q^8 = 32 \times (2^{-1})^8 \Rightarrow a_{p+5} = 2^{-3} = \dfrac{1}{8}.$

RESPOSTA: a

.

Questão 11.

Dados dois números ímpares p e q, com p > q, a quantidade de números pares entre eles é sempre igual a:

a) $\frac{p+q}{2}$ b) p-q c) 2p-q d) $\frac{p-q}{2}$ e) p+2q

RESOLUÇÃO:

Seja a seqüência de números inteiros: q, q+1, q+2, q+3, ..., n, ..., p-3, p-2, p-1, p uma PA de razão um. Como os seus extremos são números ímpares, a quantidade de números pares entre eles é sempre: $\frac{p-q}{2}$.

RESPOSTA: d

Questão 12.

Dada a matriz A = $\begin{pmatrix} 2 & k \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$, detA ≠ 0, a soma dos valores de k para os quais detA = $detA^{-1}$ é:

a) 2 b) –2 c) 1 d) –1 e) 0

RESOLUÇÃO:

Se detA = $detA^{-1}$, detA = ± 1, pois 1 e –1 são os únicos números cujos inversos são iguais a eles.

$$\begin{vmatrix} 2 & k \\ -2 & 1 \end{vmatrix} = \pm 1 \Rightarrow 2 + 2k = \pm 1 \Rightarrow 2 + 2k = 1 \text{ ou } 2 + 2k = -1 \Rightarrow k = -\frac{1}{2} \text{ ou } k' = -\frac{3}{2} \Rightarrow$$

$$k + k' = -\frac{1}{2} - \frac{3}{2} = -2$$

RESPOSTA: b

Questão 13.

Em uma sala existem 100 caixas numeradas com os múltiplos sucessivos de 4, começando por 4. Em cada caixa existe uma quantidade de bolas igual ao número exibido na parte externa da caixa. O total de bolas existentes em todas as caixas é:

a) 16000 b) 14400 c) 18800
d) 20200 e) 24120

RESOLUÇÃO:

4	8	12	16		a_{100}

A seqüência é uma PA, onde $a_1 = 4$, $r = 4$, $n = 100$ e
$a_{100} = 4 + (100-1)\times 4 = 4+396 = 400$.

O total de bolas é : $\dfrac{(4+400)100}{2} = \dfrac{40400}{2} = 20200$.

RESPOSTA: d

Questão 14.

O conjunto solução da equação $\sqrt{x^2 - 4x + 4} = x - 2$ é:

a) $[2;\infty[$ b) $[0;\ 1]$ c) $[1;\ 2]$ d) $[0;\ \infty[$ e) IR

RESOLUÇÃO:

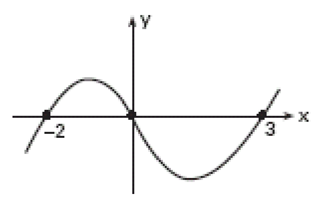
O domínio da equação são os valores de x que satisfazem à inequação: ≥ 0
$\Rightarrow (x-2)^2 \geq 0 \Rightarrow x' = x'' = 2 \Rightarrow D = \Re_+$.

$\left(\sqrt{x^2 - 4x + 4}\right)^2 = (x-2)^2 \Rightarrow x^2 - 4x + 4 = x^2 - 4x + 4 \Rightarrow S = D = [0;\ \infty[$

RESPOSTA: d

Questão 15.

Na figura, temos o esboço do gráfico da função $y = p(x)$, sendo $p(x)$ um polinômio. Pode-se afirmar que $p(x)$ é divisível por:



a) $x-2$ b) $x+3$ c) $(x+2)(x+3)$ d) $(x+3)(x-2)$ e) $(x+2)(x-3)$

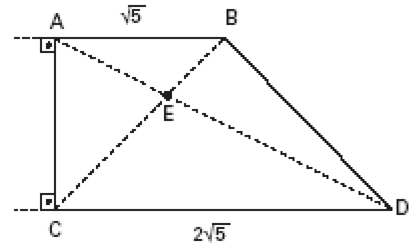
RESOLUÇÃO:

Pelo gráfico de $P(x)$, vemos que $P(-2)=0$, $P(0) = 0$ e $P(3) = 0$. Logo, -2, 0 e 3 são raízes do polinômio. $\Rightarrow P(x) = a\, x(x+2)(x-3)$

RESPOSTA: e

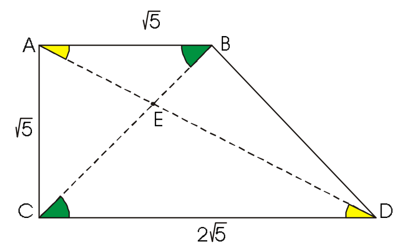
Questão 16.

Na figura, se o triângulo ABC é isósceles, a medida de $\overline{AE}$ é:



a) $\sqrt{3}$ b) $\dfrac{5}{3}$ c) $\dfrac{4}{3}$ d) $\dfrac{2}{3}$ e) $\sqrt{2}$

RESOLUÇÃO:



No triângulo ACD, AD² = 5+20 $\Rightarrow$ AC = 5

Sendo $\overline{AB} // \overline{CD}$ o ΔAEB é semelhante ao ΔCED $\Rightarrow$

$$\frac{AE}{ED} = \frac{AB}{CD} \Rightarrow \frac{\sqrt{5}}{2\sqrt{5}} = \frac{1}{2} \Rightarrow 2AE = ED.$$

Como AD = AE+ ED $\Rightarrow$ 3AE = 5 $\Rightarrow$ AE = $\dfrac{5}{3}$

RESPOSTA: b.

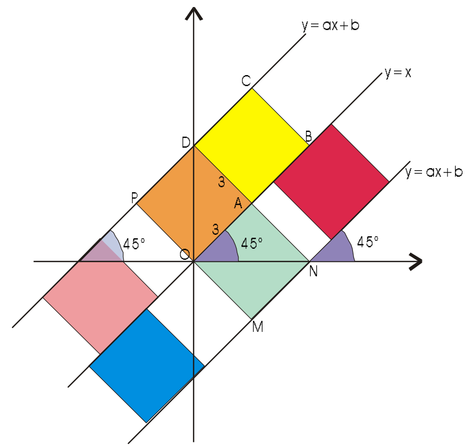
Questão 17.

Um quadrado ABCD, de lado 3, tem os vértices consecutivos A e B na reta y = x. Se os vértices C e D estão na reta y = ax + b, então a $\times$ b pode ser:

a) $4\sqrt{2}$ b) $2\sqrt{3}$ c) $3\sqrt{2}$ d) $3\sqrt{3}$ e) $2\sqrt{2}$

RESOLUÇÃO:

Na figura as lado estão 6 das infinitas posições que o quadrado ABCD pode ocupar e também as duas posições que a reta y = ax+b pode ocupar.
Consideremos na figura os quadrados amarelo (ABCD).e verde (AOMN) com um vértice comum A
As retas y=x e y=ax+b são paralelas, logo a=1.
OD = $3\sqrt{2}$ (diagonal do quadrado ADPO).
O ponto (0, $3\sqrt{2}$) é a interseção da reta y=ax+b passando por D $\Rightarrow$ b= $3\sqrt{2}$.
Então a$\times$b=1$\times$3$\sqrt{2}$ =3$\sqrt{2}$

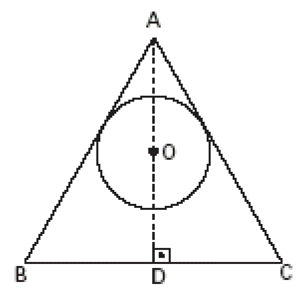


RESPOSTA: c.

Questão 18.

O triângulo ABC é eqüilátero e o círculo de centro O tem raio $\frac{AD}{4}$.
Se a área do círculo é 3π, a área do triângulo é:

a) 12π b) $16\sqrt{3}$ c) $8\sqrt{2}$ d) 9π e) $20\sqrt{5}$



RESOLUÇÃO:

Se a área do círculo é 3π, r = $\sqrt{3}$.

A questão informa que $\frac{AD}{4} = \sqrt{3} \Rightarrow AD = 4\sqrt{3}$.

AD é a altura do triângulo eqüilátero $\Rightarrow \frac{BC\sqrt{3}}{2} = 4\sqrt{3} \Rightarrow BC = 8$.

A área do triângulo ABC é então: $\frac{64\sqrt{3}}{4} = 16\sqrt{3}$.

RESPOSTA: b.

Questão 19.

No lançamento simultâneo de 2 dados não viciados, a probabilidade de obter-se soma 7 é:

a) $\frac{1}{3}$ b) $\frac{7}{36}$ c) $\frac{1}{6}$ d) $\frac{2}{3}$ e) $\frac{1}{12}$

RESOLUÇÃO:

O número de elementos de E (espaço amostral) é: $n(E) = 6 \times 6 = 36$.
O conjunto dos elementos do evento **obter-se soma 7** é:
$A = \{(1,6), (2,5), (3,4), (4,3), (5,2), (6,1)\} \Rightarrow n(A) = 6 \Rightarrow$

$$p(A) = \frac{n(A)}{n(E)} = \frac{6}{36} = \frac{1}{6}$$

RESPOSTA: c.

Questão 20.

Um prisma reto de base quadrada teve os lados da base e a altura diminuídos de 50%. O seu volume ficou diminuído de:
a) 50% b) 75% c) 87,5% d) 85% e) 60%

RESOLUÇÃO:

Considerando a como as arestas da base e b a altura do prisma, o seu volume é
$V = a^2b$.
As arestas do novo prisma são 0,5a e 0,5b, então o seu volume é:

$V_0 = (0{,}5a)^2 \times 0{,}5b = 0{,}125a^2b \Rightarrow \frac{V_0}{V} = 12{,}5\% \Rightarrow$ o volume foi diminuído de 87,5%.

RESPOSTA: c.
]