UFRJ- VESTIBULAR 2004
PROVA DE MATEMÁTICA.

Resolução e comentário pela Professora Maria Antônia Conceição Gouveia.

Apresente suas soluções de forma clara, indicando, em cada caso, o raciocínio que conduziu à resposta:

QUESTÃO I

Manuel e Joaquim resolveram disputar o seguinte jogo: uma bola será retirada ao acaso de uma urna que contém 999 bolas idênticas, numeradas de 1 a 999.Se o número sorteado for par, ganha Manuel; se for ímpar, Joaquim ganha. Isto foi resolvido após muita discussão, pois ambos queriam as pares.

Se todas as bolas têm a mesma probabilidade de serem retiradas, identifique quem tem mais chance de ganhar o jogo. Justifique sua resposta.

RESOLUÇÃO:

Considerando a seqüência de números ímpares: 1, 3, 5, 7, ..., 999, temos: $1+(n-1).\ 2=999 \Rightarrow 2n-2 = 998 \Rightarrow 2n = 1000 \Rightarrow n = 500 \Rightarrow$ 1 até 999 existem 500 números ímpares e 999 – 500 = 499 números pares.

Quem tem maior chance de ganhar é Joaquim porque o número de bolas ímpares é maior que a de bolas pares.

QUESTÃO II

Para lotar o estádio no final do campeonato, planejou-se inicialmente, distribuir os 23 000 ingressos em três grupos da seguinte forma: 30% seriam vendidos para a torcida organizada local; 10% seriam vendidos para a torcida organizada do time rival e os restantes para espectadores não filiados às torcidas.
Posteriormente, por motivos de segurança, os organizadores resolveram que 3 000 destes ingressos não seriam mais postos à venda, cancelando-se então 1 000 ingressos destinados a cada um dos três grupos.

Determine o percentual dos ingressos destinados a torcedores não filiados às torcidas após o cancelamento dos 3000 ingressos.

RESOLUÇÃO:

Plano inicial:

Ingressos para a torcida organizada local: 0,3. 23 000 = 6 900.
Ingressos para a torcida organizada do time rival: 0,1 . 23 000 = 2 300.
Ingressos para espectadores não filiados às torcidas: 0,6 . 23 000 = 13 800.

Plano final:

Total de ingressos a serem vendidos: 23 000 – 3 000 = 20 000.
Ingressos para espectadores não filiados às torcidas: 12 800 cujo percentual em relação ao total de 20 000 ingressos é: $\frac{12800}{20000}=\frac{64}{100}=0{,}64=64\%$.

QUESTÃO III

Uma esfera de vidro, de diâmetro interno 10cm, está cheia de bolas de gude perfeitamente esféricas de raio 1 cm.

Se n é o número de bolas de gude dentro da esfera, indique qual das opções a seguir é verdadeira:

OPÇÃO I: n > 125
OPÇÃO II: n = 125
OPÇÃO III: n < 125

Justifique sua resposta.

RESOLUÇÃO:

O volume interno do recipiente é maior que o volume total das n bolas de gude: $n.\frac{4\pi}{3}.1 < \frac{4\pi}{3}.(5)^3 \Rightarrow n < 125.$

OPÇÃO III: n < 125

QUESTÃO IV

n e **m** são números naturais, **n** = 1 000! + 18 e **m** = 50! + 37.

a) **Calcule o resto da divisão de n por 18;**
b) **m é um número primo? Justifique a resposta.**

RESOLUÇÃO:

a) $\frac{n}{18} = \frac{1000!+18}{18} = \frac{1000.999.998.....991.(55.18).899!+18}{18}$.
$n = 18(1000.999.998.....991.55.899!+1) \Rightarrow$ n é múltiplo de 18 e assim o resto da sua divisão por 18 é **zero**.

c) **m** = 50! + 37 $\Rightarrow$ **m** = $50.49!+37 = 50.49.48.....37.36!+37 = 37(50.49.48.....38.36!+1)$ $\Rightarrow$ **m é um múltiplo de 37, portanto não é primo.**

QUESTÃO V

A equação $x^2 - 2x\cos\theta + \text{sen}^2\theta = 0$ possui raízes reais iguais.
Determine θ, $0 \le \theta \le 2\pi$.

RESOLUÇÃO:

De $x^2 - 2x\cos\theta + \text{sen}^2\theta = 0$ e da informação que esta equação possui raízes reais iguais, temos: $\Delta = 4\cos^2\theta - 4\,\text{sen}^2\theta = 4\cos 2\theta = 0$.

Resolvendo a equação resultante $4\cos 2\theta = 0 \Rightarrow 2\theta = \frac{\pi}{2} + 2k\pi \Rightarrow \theta = \frac{\pi}{4} + k\pi$.

k	$\theta = \frac{\pi}{4} + k\pi$
0	$\theta = \frac{\pi}{4} \in [0, 2\pi]$
1	$\theta = \frac{\pi}{4} + \pi = \frac{5\pi}{4} \in [0, 2\pi]$
2	$\theta = \frac{\pi}{4} + 2\pi = \frac{9\pi}{4} \notin [0, 2\pi]$

Logo $\theta = \frac{\pi}{4}$ ou $\theta = \frac{5\pi}{4}$.

QUESTÃO VI

Felipe começa a escrever números naturais em uma folha de papel muito grande, uma linha após a outra, como mostrado a seguir:

1
2 3 4
3 4 5 6 7
4 5 6 7 8 9 10
5 6 7 8 9 10 11 12 13
6 7 8 9 10 11 12 13 14 15 16
....
....

Considerando que Felipe mantenha o padrão adotado em todas as linhas:

a) determine quantos números naturais ele escreverá na 50ª linha?
b) Determine a soma de todos os números escritos na 50ª linha?
c) Prove que a soma de todos os elementos de uma linha é sempre o quadrado de um número ímpar.

RESOLUÇÃO:

Como a linha 1 tem (2.1-1) = 1 termo;
Como a linha 2 tem (2.2-1) = 3 termos;
Como a linha 3 tem (2.3-1) = 5 termos;
Como a linha 4 tem (2.4-1) = 7 termos;
....
....

A linha n terá **(2n-1)** termos.

a) a linha 50 tem portanto (2.50-1)=99 termos;
b) como o primeiro termo da linha 50 é 50, e como ela forma uma progressão aritmética de razão 1 e tem 99 termos, o seu último termo é 50 + (99-1).1 = 148.Logo a linha 50 é a seqüência 50, 51, 52, 53, ..., 148.

A soma dos seus termos é: S = $\frac{(50+148).99}{2} = \frac{198.99}{2} = 99^2 = 9801$

c) Vemos que a linha n tem sempre **(2n-1)** termos.

O primeiro termo da linha n é **n**; a razão da P.A. é 1; o último termo será n + (2n-1-1).1 = **3n-2**.

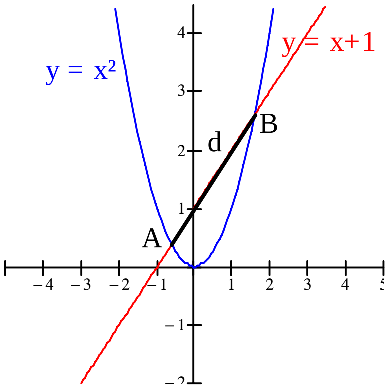
Assim a soma dos seus elementos será:

$$\frac{(n+3n-2)(2n-1)}{2}=\frac{(4n-2)(2n-1)}{2}=(2n-1)(2n-1)=(2n-1)^2.$$

QUESTÃO VII

Determine o comprimento do segmento cujas extremidades são os pontos de interseção da reta y = x+1 com a parábola y = x².

RESOLUÇÃO:

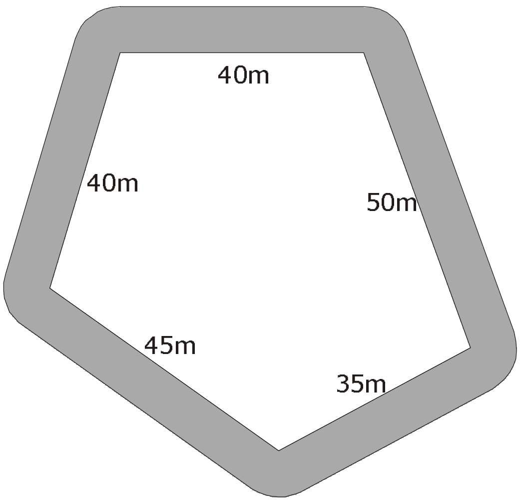


Resolvendo o sistema: $\begin{cases} y=x+1 \\ y=x^2 \end{cases} \Rightarrow x^2-x-1=0 \Rightarrow x=\frac{1\pm\sqrt{5}}{2} \Rightarrow y=\frac{1\pm\sqrt{5}}{2}+1.$

Os pontos de interseção são $A=\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2},\frac{3-\sqrt{5}}{2}\right)$ e $B=\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2},\frac{3+\sqrt{5}}{2}\right)$, logo a distância entre eles é: $d=\sqrt{\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}-\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^2+\left(\frac{3+\sqrt{5}}{2}-\frac{3-\sqrt{5}}{2}\right)^2}=\sqrt{\left(\frac{2\sqrt{5}}{2}\right)^2+\left(\frac{2\sqrt{5}}{2}\right)^2}=\sqrt{5+5}=\sqrt{10}$

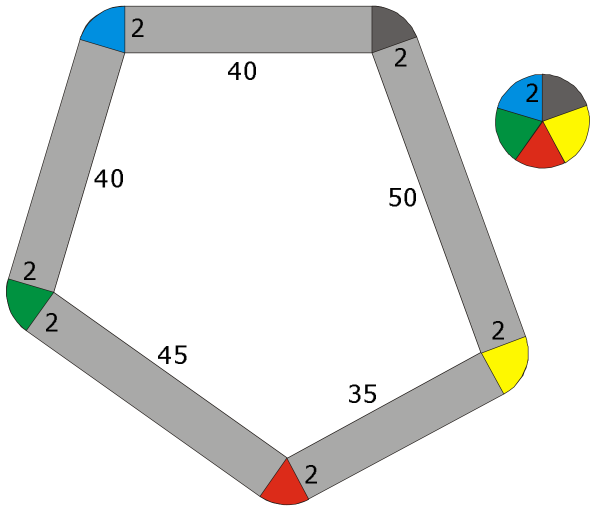
QUESTÃO VIII

A figura a seguir representa a planta de um terreno plano, em forma de pentágono convexo, de lados 40m, 50m, 35m, 45m e 40m, em toda a volta deste terreno foi construída uma calçada de 2m de largura (ou seja: a distância de qualquer ponto da borda desta calçada ao terreno é de exatamente 2m).



Determine a área da calçada.

RESOLUÇÃO:



Como a distância de qualquer ponto da borda da calçada ao terreno é de exatamente 2m, notamos que ela é formada de 5 retângulos e 5 setores circulares que juntos formam um círculo de raio 2 (os setores são congruentes aos ângulos externos do pentágono, somando então 360°).
A área da calçada é então:
$S = 2(40+40+45+35+50) + 2^2\pi = 420 + 4\pi$.
$S = (420 + 4\pi)$u.a.

QUESTÃO IX

z é um número tal que $z^7 = 1$, $z \neq 1$.
Calcule $1+z+z^2+z^3+z^4+z^5+z^6$.

RESOLUÇÃO:

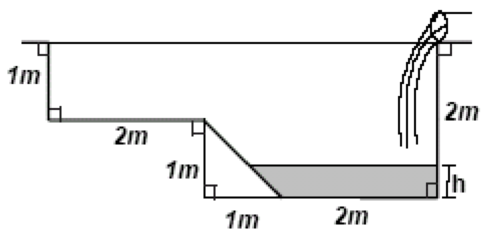
$z^7 = 1 \Rightarrow z^7 - 1 = 0$
Como 1 é raiz da equação $z^7 - 1 = 0$, dividamos o polinômio $z^7 - 1$ por $z - 1$ pelo método de Ruffini:

	1	0	0	0	0	0	0	-1
1	1	1	1	1	1	1	1	0

Vemos que o quociente da divisão é $z^6+ z^5+ z^4+z^3+ z^2 + z +1$, logo:
De $z^7 - 1 = 0 \Rightarrow (z-1)(1+z+z^2+z^3+z^4+z^5+z^6) = 0$, como $z \neq 1 \Rightarrow$ $\mathbf{1+z+z^2+z^3+z^4+z^5+z^6 = 0}$**.**

QUESTÃO X

Uma piscina de borda retangular e paredes laterais verticais está completamente vazia. Para enchê-la será usada uma mangueira que despeja água a uma vazão constante. A piscina ficará cheia até a borda 30 minutos após o início do processo. A figura a seguir mostra uma seção transversal da piscina por um plano vertical paralelo a um par de lados da borda.

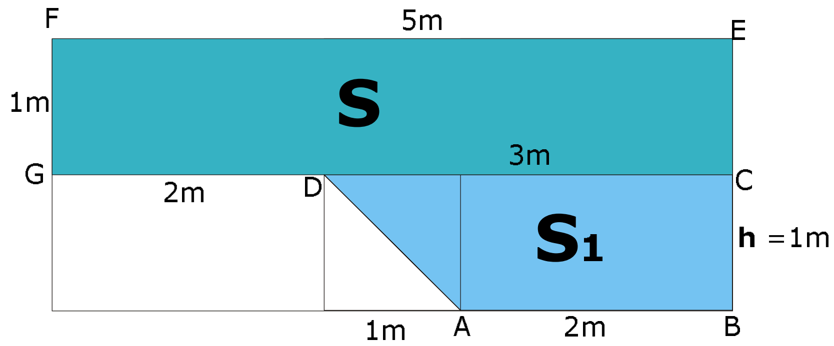


São idênticas todas as seções transversais do interior da piscina paralelas à seção mostrada na figura, onde também estão assinalados os ângulos retos.

a) Determine o tempo necessário para o nível **h** de água na piscina atinja 1 metro de profundidade.

b) Se **t** representa o tempo contado a partir do momento em que se começa a encher a piscina, $0 \le t \le 30$, expresse **t** como função da altura **h** da água na piscina.

RESOLUÇÃO:



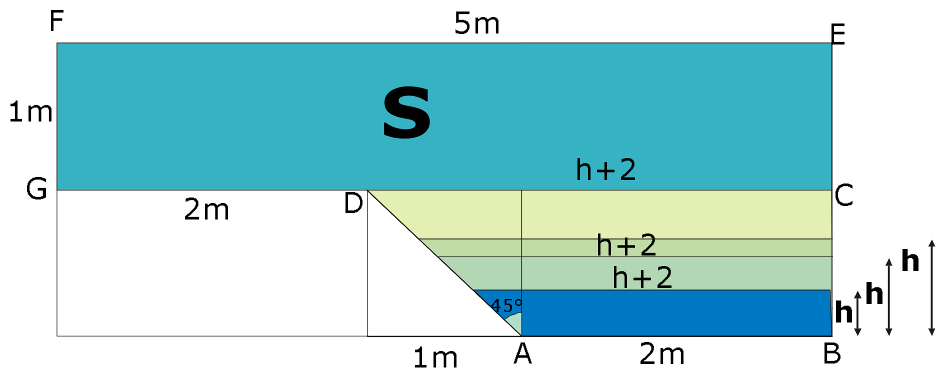
a) Sendo a vazão da água e a largura da piscina constantes, para a determinação do tempo podemos trabalhar apenas com as áreas das seções transversais consideradas.
Considerando como S a área do retângulo CEFG: S = 5m².

Considerando como S_1 a área do trapézio ABCD: $S_1 = \dfrac{(2+3).1}{2}$ = 2,5m².

Vemos que $\dfrac{S_1}{S} = \dfrac{1}{2} \Rightarrow S = 2\,S_1$.

$S + S_1 = 2\,S_1 + S_1 = 3\,S_1$.
Se o tempo para 3 S_1 é de 30 minutos e sendo a vazão constante, então o tempo para S_1 é de 10 minutos.

b)



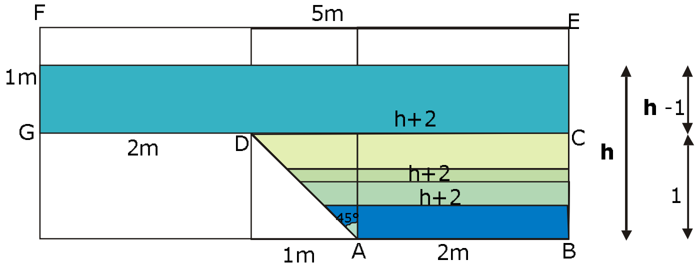
Considerando como v a vazão constante da água, b a largura constante da piscina e **V** o volume de água na piscina em função da altura h, temos:

I- $0 \le h \le 1 \Rightarrow \begin{cases} V = v.t \\ V = \left[\dfrac{(2+h+2)h}{2}\right].b \end{cases} \Rightarrow v.t = \left[\dfrac{(4+h)h}{2}\right].b$. Como b e v são constantes:

$t(h) = \dfrac{b}{v}\left[\dfrac{(4+h)h}{2}\right]$ e $t(1) = 10 \Rightarrow \dfrac{b}{v}\left[\dfrac{(4+1)1}{2}\right] = 10 \Rightarrow \dfrac{b}{v} = 10.\dfrac{2}{5} \Rightarrow \dfrac{b}{v} = 4$.

Assim $t(h) = 4\left[\dfrac{(4+h)h}{2}\right] \Rightarrow$ **t(h) = h(2h+8)**.

II- $1 < h \leq 2$:



Para h = 1, $V = \left[\frac{(4+h)h}{2}\right].b = \left[\frac{(4+1)1}{2}\right].b = \frac{5b}{2}$.

Para $1 < h \leq 2$, $V = \frac{5b}{2} + (h\text{-}1).5b = b\left(\frac{5}{2} + 5h - 5\right) = b\left(5h - \frac{5}{2}\right)$.

Como $V = vt \Rightarrow vt = b\left(5h - \frac{5}{2}\right) \Rightarrow t(h) = \frac{b}{v}\left(5h - \frac{5}{2}\right)$ e sendo $\frac{b}{v} = 4$, temos:

$t(h) = 4\left(5h - \frac{5}{2}\right) = \mathbf{2h\text{-}10}$.

Conclusão: $t(h) = \begin{cases} h(8+2h), \text{se } 0 \leq h \leq 1 \\ 20h - 10, \text{se } 1 < h \leq 2 \end{cases}$.